

PRACA KLASOWA 2, 11 stycznia 2000, grupa 1

1. (20pkt) W urnie znajduje się 10 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 10. Z urny losujemy kolejno ze zwracaniem po jednej kuli dopóki nie wylosujemy kuli z numerem 7.
 - a) Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 wykonamy skończoną liczbę losowań
 - b) Zaproponujemy przestrzeń probabilistyczną dla tego zadania
Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - c) dokonamy nieparzystej liczby losowań
 - d) dokonamy nieparzystej liczby losowań pod warunkiem, że będziemy losować kule conajmniej 3 razy.
2. (15 pkt) W pewnym mieście 35% mieszkańców ma conajwyżej 20 lat, 25% od 21 do 40 lat a 40% powyżej 40 lat. W ostatnim roku chorowało 30% spośród osób do 20 lat, 10% spośród osób od 21 do 40 lat i 20% osób starszych niż 40 lat. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrany losowo mieszkaniec miasta
 - a) chorował w zeszłym roku
 - b) nie chorował w zeszłym roku i ma nie więcej niż 40 lat.
3. (20pkt) Rzucamy trzema sześciennymi kostkami do gry. Rozważmy następujące zdarzenia:
 A - na pierwszej i drugiej kostce wypadła 6tka
 B - na drugiej i trzeciej kostce wypadła ta sama liczba oczek
 C - suma wyrzuconych oczek była parzysta.
Czy zdarzenia A, B, C są parami niezależne? Czy zdarzenia $A \cap B$ i C są niezależne. Odpowiedź uzasadnij.
4. (15 pkt) W urnie znajduje się a kul białych i b kul czarnych. Powtarzamy następujące doświadczenie: losujemy z urny kulę i rzucamy monetą - jeśli wypadnie orzeł to zwracamy kulę do urny, jeśli reszka to nie zwracamy kuli. Niech $p_n(a, b)$ oznacza prawdopodobieństwo, że za n -tym razem wylosujemy kulę białą. Udowodnij, że

$$p_n(a, b) = \frac{a}{a+b} \text{ dla } n = 1, 2, \dots, a+b.$$

5. (10pkt) Zdarzenia A i B są niezależne, $0 < P(B) < 1$ oraz $5P(A \cap B) = P(B)$. Oblicz
 - a) $P(A)$
 - b) $P(A|B')$.
6. (20pkt) Dane są dwie urny - w pierwszej znajduje się 5 kul białych i 5 czarnych, w drugiej 2 białe i 6 czarnych. Z pierwszej urny losujemy dwie kule i wrzucamy je drugiej urny, a następnie losujemy z drugiej urny jedną

kulę.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że z drugiej urny wylosujemy kulę białą?

Założmy, że z drugiej urny wylosowaliśmy kulę białą, oblicz prawdopodobieństwo, że w pierwszym losowaniu wyciągnęliśmy

b) dwie kule białe

c) conajmniej jedną kulę białą.

7. (15pkt*) Karol i Karolina grają w następującą grę: rzucają monetą i jeśli wypadnie orzeł to Karolina daje Karolowi 1 zł., a jeśli reszka to Karol daje Karolinie 1 zł. Rzuty się powtarza aż któryś z graczy przegra grę tzn zostanie bez pieniędzy. Zakładając, że na początku gry Karol miał 2 zł., a Karolina 3 zł., oblicz prawdopodobieństwo, że grę wygra Karolina.

PRACA KLASOWA 2, 11 stycznia 2000, grupa 2

1. (10pkt) Zdarzenia A i B są niezależne, $0 < P(A) < 1$ oraz $4P(A \cap B) = P(A)$. Oblicz
 - a) $P(B)$
 - b) $P(B|A')$.

2. (20pkt) W urnie znajduje się 11 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 11. Z urny losujemy kolejno ze zwracaniem po jednej kuli dopóki nie wylosujemy kuli z numerem 11.
 - a) Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 wykonamy skończoną liczbę losowań
 - b) Zaproponujemy przestrzeń probabilistyczną dla tego zadania
Oblicz prawdopodobieństwo tego, że
 - c) dokonamy parzystej liczby losowań
 - d) dokonamy parzystej liczby losowań pod warunkiem, że będziemy losować kule conajmniej 2 razy.

3. (20pkt) Dane są dwie urny - w pierwszej znajduje się 4 kule białe i 6 czarnych, w drugiej 1 biała i 7 czarnych. Z pierwszej urny losujemy dwie kule i wrzucamy je drugiej urny, a następnie losujemy z drugiej urny jedną kulę.
 - a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że z drugiej urny wylosujemy kulę białą?
Założmy, że z drugiej urny wylosowaliśmy kulę białą, oblicz prawdopodobieństwo, że w pierwszym losowaniu wyciągnęliśmy
 - b) dwie kule białe
 - c) conajmniej jedną kulę białą.

4. (15 pkt) W pewnym mieście 40% mieszkańców ma conajwyżej 20 lat, 25% od 21 do 40 lat a 35% powyżej 40 lat. W ostatnim roku chorowało 40% spośród osób do 20 lat, 20% spośród osób od 21 do 40 lat i 30% osób starszych niż 40 lat. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrany losowo mieszkaniec miasta
 - a) nie chorował w zeszłym roku
 - b) chorował w zeszłym roku i ma więcej niż 20 lat.

5. (20pkt) Rzucamy trzema sześciennymi kostkami do gry. Rozważmy następujące zdarzenia:
 A - na pierwszej kostce wypadła 6tka
 B - na drugiej i trzeciej kostce wypadła ta sama liczba oczek
 C - suma wyrzuconych oczek była parzysta.
Czy zdarzenia A, B, C są parami niezależne? Czy zdarzenia $A \cap B$ i C są niezależne. Odpowiedź uzasadnij.

6. (15 pkt) W urnie znajduje się a kul białych i b kul czarnych. Powtarzamy następujące doświadczenie: losujemy z urny kulę i rzucamy monetą - jeśli wypadnie orzeł to zwracamy kulę do urny, jeśli reszka to nie zwracamy kuli. Niech $p_n(a, b)$ oznacza prawdopodobieństwo, że za n -tym razem wylosujemy kulę białą. Udowodnij, że

$$p_n(a, b) = \frac{a}{a+b} \text{ dla } n = 1, 2, \dots, a+b.$$

7. (15pkt*) Karol i Karolina grają w następującą grę: rzucają monetą i jeśli wypadnie orzeł to Karolina daje Karolowi 1 zł., a jeśli reszka to Karol daje Karolinie 1 zł. Rzuty się powtarza aż któryś z graczy przegra grę tzn zostanie bez pieniędzy. Zakładając, że na początku gry Karol miał 2 zł., a Karolina 3 zł., oblicz prawdopodobieństwo, że grę wygra Karolina.