Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 1
(zadania gwiazdkowe do oddania 15 października)

1. Udowodnij, że dla dowolnych punktów x_n, x w przestrzeni metrycznej E, $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n \to x$.

2. Wykaż, że:
a) jeśli $X_n \to X$ p.n., to $X_n \Rightarrow X$;
b) jeśli $X_n \to X$ według prawdopodobieństwa, to $X_n \Rightarrow X$;
c) jeśli $X_n \Rightarrow c$, gdzie c jest stałą, to $X_n \to c$ według prawdopodobieństwa.

3* Wykaż, że dla rzeczywistych zmiennych losowych $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zmienne losowe $\tilde{X}_n$ o tym samym rozkładzie co X_n i $\tilde{X}$ o tym samym rozkładzie co X takie, że $\tilde{X}_n$ jest zbieżny do $\tilde{X}$ p.n.

4. Zmienne losowe X_n, X przyjmują tylko wartości całkowite.
a) Wykaż, że $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{P}(X_n = k) \to \mathbf{P}(X = k)$ dla wszystkich liczb całkowitych k.
b) Czy z istnienia granic $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k)$ dla k całkowitych wynika zbieżność X_n wg rozkładu?

5. Czy teza punktu a) poprzedniego zadania się zmieni, jeśli zmienne X_n przyjmują wartości wymierne?

6. Wykaż, że jeśli $np_n \to \lambda$, to $\mathrm{Bin}(n, p_n) \Rightarrow \mathrm{Poiss}(\lambda)$.

7. Niech X będzie rzeczywistą zmienną losową. Wykaż, że istnieje ciąg zmiennych X_n zbieżny według rozkładu do X taki, że
a) każde X_n przyjmuje tylko skończenie wiele wartości,
b) zmienne X_n mają gęstość.

8. Udowodnij, że $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n \to a$ oraz $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

9* Załóżmy, że X jest niezdegenerowaną rzeczywistą zmienną losową (tzn. $\mathbf{P}(X = x) < 1$ dla wszystkich x). Wykaż, że zmienne $a_nX + b_n$, $a_n \geqslant 0$ zbiegają według rozkładu do zmiennej $aX + b$, $a \geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n \to a$ i $b_n \to b$.

10. Dane są zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ takie, że
$$\mathbf{P}\left(X_n = \frac{j}{n}\right) = \frac{2j}{n(n+1)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$
Wykaż, że ciąg X_n jest zbieżny według rozkładu i wyznacz rozkład graniczny.

11. Niech g_{X_n}, g_X będą gęstościami odpowiednich rzeczywistych zmiennych losowych. Wykaż, że jeśli $g_{X_n}(t) \to g_X(t)$ dla p.w. t, to $X_n \Rightarrow X$.

12. Co trzeba założyć o funkcji f, by z tego, że X_n jest zbieżne według rozkładu do X wynikała zbieżność według rozkładu $f(X_n)$ do $f(X)$?

13. Wykaż, że jeśli $X_n \Rightarrow X$ oraz dystrybuanta F_X jest ciągła, to F_{X_n} zbiega jednostajnie do F_X.

14* Niech X_n będzie pierwszą współrzędną rozkładu jednostajnego na kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. Udowodnij, że $\sqrt{n}X_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 2
(zadania gwiazdkowe do oddania 22 października)

1. Udowodnij, że jeśli $X_n \Rightarrow X$, $p > 0$ oraz $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^p < \infty$, to $\mathbf{E}|X|^p < \infty$, ale niekoniecznie $\mathbf{E}|X_n|^p \to \mathbf{E}|X|^p$. Pokaż, że jest to jednak prawdą, gdy dla pewnego $\varepsilon > 0$, $\sup_n \mathbf{E}|X_n|^{p+\varepsilon} < \infty$.

2* Niech $x \in (0,1)$ będzie liczbą niewymierną. Wykaż,że

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\{kx \mathrm{mod} 1\}} \Rightarrow \lambda,$$

gdzie λ oznacza miarę Lebesgue'a na $[0,1]$. Co się dzieje, gdy x jest wymierne?

3. Załóżmy, że $X_n \Rightarrow X$ oraz $Y_n \Rightarrow Y$. Wykaż, że jeśli Y jest stałe p.n., to $X_n + Y_n \Rightarrow X + Y$ oraz $X_n Y_n \Rightarrow XY$. Czy implikacja jest prawdziwa, jeśli Y nie jest zdegenerowaną zmienną losową?

4. Załóżmy, że dla dowolnej liczby naturalnej k, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n^k = \frac{1}{k+1}$. Wykaż, że
i) jeśli $\mathbf{P}(X_n \in [0,1] = 1)$, to X_n zbiegają według rozkładu,
ii) założenie z i) nie jest konieczne.

5* Wykaż, że wzór

$$d(\mu,\nu) = \inf\Big\{\varepsilon > 0 :\ \forall_t\ F_\mu(t-\varepsilon) - \varepsilon < F_\nu(t) < F_\mu(t+\varepsilon) + \varepsilon\Big\}$$

definiuje metrykę na wszystkich rozkładach probabilistycznych na $\mathbb{R}$ zgodną ze słabą zbieżnością (tzn. $\mu_n \Rightarrow \mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(\mu_n,\mu) \to 0$).

6. Udowodnij, że jeśli dla wszystkich n, X_n jest niezależne od Y_n, X niezależne od Y oraz $X_n \Rightarrow X$ i $Y_n \Rightarrow Y$, to $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.

7. Wykaż, że rodzina rozkładów normalnych $\mathcal{N}(a_\alpha, \sigma_\alpha^2)$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_\alpha |a_\alpha|$, $\sup_\alpha \sigma_\alpha^2 < \infty$.

8. Dana jest rodzina rozkładów

   a) wykładniczych $\{\mathrm{Exp}(\lambda) : \lambda \in A\}$, $A \subseteq \mathbb{R}_+$,

   b) jednostajnych $\{U(a,b) : a, b \in A,\ a < b\}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

   Jaki warunek musi spełniać zbiór A, aby ta rodzina była ciasna?

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 3
(zadania gwiazdkowe do oddania 29 października)

1. Oblicz funkcje charakterystyczne podstawowych rozkładów tzn.
   a) geometrycznego z parametrem p,
   b) Poissona z parametrem λ,
   c) dwumianowego z parametrami n, p,
   d) jednostajnego na przedziale $[a, b]$,
   e) normalnego $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$,
   f) wykładniczego z parametrem λ,
   g) Cauchy'ego z parametrem h.

2. Które z następujących funkcji są funkcjami charakterystycznymi: $\cos t$, $\cos^2 t$, $\frac{1}{4}(1+e^{it})^2$, $\frac{1+\cos t}{2}$, $\frac{1}{2-e^{it}}$?

3. Funkcja φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej. Czy funkcje
   a) φ^2, b) $\mathrm{Re}(\varphi)$, c) $|\varphi|^2$, d) $|\varphi|$
   muszą być funkcjami charakterystycznymi?

4. Pokaż, że kombinacje wypukłe funkcji charakterystycznych są funkcjami charakterystycznymi.

5. Wykaż, że dla zmiennych X przyjmujących tylko wartości całkowite zachodzi
$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi_X(t) dt.$$

6* Udowodnij, że jeśli X ma rozkład ciągły z gęstością g, to $\varphi_X(t) \to 0$ dla $|t| \to \infty$.

7* Znajdź niecałkowalną zmienną losową X, której funkcja charakterystyczna jest różniczkowalna w 0.

8. Korzystając z funkcji charakterystycznej oblicz $\mathbf{E}X^k$ dla $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

9. Udowodnij, że zmienna losowa X jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich t.

10. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X i $X + Y$ mają rozkłady normalne. Udowodnij, że zmienna Y ma także rozkład normalny lub jest stała p.n..

11. Zmienne X, Y, ε są niezależne, przy czym X, Y mają rozkład wykładniczy z parametrem λ oraz $\mathbf{P}(\varepsilon = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wykaż, że zmienna $X - Y$ ma ten sam rozkład, co zmienna εX.

12. Udowodnij, że splot rozkładów Cauchy'ego ma rozkład Cauchy'ego.

13. Znajdź zmienne losowe X, Y takie, że $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ oraz zmienne X, Y są zależne.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 4
(zadania gwiazdkowe do oddania 5 listopada)

1. Udowodnij, że jeśli $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbf{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2$ to zmienna $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon_n$ ma rozkład jednostajny na $[-1, 1]$.

2. Dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład geometryczny z parametrem $p_n \in (0, 1)$. Wykaż, że jeśli $(a_n)_n$ jest takim ciągiem liczb dodatnich, że $a_n \to 0$, $p_n/a_n \to \lambda > 0$, to rozkład zmiennych $a_n X_n$ zbiega słabo do rozkładu wykładniczego z parametrem λ.

3* a) Udowodnij, że $\varphi(x) = (1 - |x|)I_{(-1,1)}(x)$ jest funkcją charakterystyczną
b) Udowodnij, że jeśli $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ jest parzysta, wypukła i malejąca na $[0, \infty)$, kawałkami liniowa oraz $\varphi(0) = 1$ to φ jest funkcją charakterystyczną.
c)Udowodnij, że jeśli $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ jest parzysta, wypukła i malejąca na $[0, \infty)$ oraz $\varphi(0) = 1$, to φ jest funkcją charakterystyczną.

4* Wykaż, że funkcja $e^{-|t|^{\alpha}}$
a*) jest funkcją charakterystyczną dla $0 < \alpha \leqslant 1$,
b*) nie jest funkcją charakterystyczną dla $\alpha > 2$,
c*) jest funkcją charakterystyczną dla $1 < \alpha \leqslant 2$.

5. Zmienna X ma funkcję charakterystyczną $\varphi_X(t) = e^{-|t|^{\alpha}}$ dla pewnego $\alpha \in (0, 2]$. Co można powiedzieć o rozkładzie zmiennej $aX + bY$, gdzie $a, b \in R$, a Y jest niezależną kopią X?

6. Czy z równości dwu funkcji charakterystycznych na pewnym otoczeniu zera wynika równość rozkładów?

7. Wykaż, że jeśli funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X jest dwukrotnie różniczkowalna w 0, to $\mathbf{E}X^2 < \infty$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 5
(zadania gwiazdkowe do oddania 12 listopada)

1. Dana jest zmienna losowa X taka, że $\mathbf{E}X^2 < \infty$ oraz $X \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(Y+Z)$, gdzie Y, Z są niezależnymi kopiami X. Wykaż, że $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ dla pewnego $\sigma \geqslant 0$.

2* Wykaż, że teza poprzedniego zadania jest prawdziwa bez założenia $\mathbf{E}X^2 < \infty$.

3. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne oraz $\mathbf{P}(X_i = a) = \mathbf{P}(X_i = 1/a) = 1/2$ dla pewnego $a > 1$. Wykaż, że zmienne $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}$ są zbieżne według rozkładu i znajdź rozkład graniczny.

4. Zmienne X_λ mają rozkład Poissona z parametrem λ. Wykaż, że
$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1), \quad \text{gdy } \lambda \to \infty.$$

5. Udowodnij, że
$$\lim_{n \to \infty} e^{-n} \sum_{k \leqslant n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnym zmiennymi losowymi takimi, że
$$\mathbf{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2}), \quad \mathbf{P}(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$
Udowodnij, że $\mathrm{Var}(X_n) \to 2$ oraz
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ przy } n \to \infty.$$

7. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład taki, że $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$. Zbadaj zbieżność względem rozkładu ciągów
$$U_n = \frac{\sqrt{n}(X_1 + \ldots, X_n)}{X_1^2 + \ldots + X_n^2}, \quad V_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}}.$$

8* Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie oraz ciąg $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ jest ciasny. Wykaż, że zmienne X_i mają średnią zero i skończoną wariancję.

9. Zmienne X_i są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[-1, 1]$. Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu $n^{-1/2}(X_1 + X_2^3 + \ldots + X_n^{2n-1})$.

10. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają jednakowy rozkład o średniej zero i wariancji 1. Ciąg (a_n) jest ograniczony oraz $s_n = (a_1^2 + a_2^2 \ldots + a_n^2)^{1/2} \to \infty$. Wykaż, że $s_n^{-1}(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n)$ zbiega według rozkładu do $\mathcal{N}(0,1)$.

11. Załóżmy, że $(X_{n,k})_{k \leqslant k_n}$ jest układem trójkątnym oraz zachodzi warunek Prochorowa
$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}|X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k}|^p \to 0 \text{ przy } n \to \infty \quad \text{dla pewnego } p > 2.$$
Wykaż, że układ $(X_{n,k})$ spełnia warunek Lindeberga.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 6
(zadania gwiazdkowe do oddania 26 listopada)

1* Niech $X, X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie oraz $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
i) $\varphi'_X(0) = 0$,
ii) zachodzi słabe prawo wielkich liczb $\frac{S_n}{n} \to 0$ wg prawdopodobieństwa,
iii) $t\mathbf{P}(|X| \geqslant t) \to 0$ oraz $\mathbf{E}[XI_{\{|X| \leqslant t\}}] \to 0$ przy $t \to \infty$.

2. Udowodnij, że zmienna $X \sim \mathcal{N}(a, C)$ ma gęstość wtedy i tylko wtedy, gdy C jest odwracalne oraz, że w tym ostatnim przypadku wynosi ona

$$g_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(C)}} \exp(-\frac{\langle C^{-1}(x-a), x-a\rangle}{2}).$$

3. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbf{E}X_i = 0$, $\mathbf{E}X_i^2 = 1$ oraz

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leqslant [nt]} X_i \text{ dla } t \geqslant 0, n = 1, 2, \ldots.$$

Udowodnij, że dla dowolnych $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ ciąg wektorów losowych $(S_n(t_1), S_n(t_2), \ldots, S_n(t_k))$ jest zbieżny według rozkładu. Jak wygląda rozkład graniczny?

4* Dla $n = 1, 2, \ldots$ i $t \in [0, 1]$ określmy zmienną $T_n(t)$ wzorem

$$T_n(t) := (nt - \lfloor nt \rfloor) S_n(\frac{\lfloor nt \rfloor + 1}{n}) + (\lfloor nt \rfloor + 1 - nt) S_n(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}),$$

gdzie S_n są takie jak w poprzednim zadaniu. Wówczas T_n można traktować jako zmienną o wartościach w $C[0, 1]$. Wykaż, że T_n są zbieżne według rozkładu. Co można powiedzieć o rozkładzie granicznym?

5. Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi d-wymiarowymi wektorami losowymi o jednakowym rozkładzie o średniej zero i macierzy kowariancji C. Niech $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, zaś f będzie funkcją z $\mathbb{R}^d$ w $\mathbb{R}^k$ różniczkowalną w zerze. Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu $\sqrt{n}(f(S_n/n) - f(0))$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II* - 7

1. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Wykaż, że $\tau \vee \sigma$, $\tau \wedge \sigma$, $\tau + \sigma$ są momentami zatrzymania. Czy $(\tau - 1)_+$, $\tau + 1$ też muszą być momentami zatrzymania?

2. Zmienne losowe (X_n) są adaptowalne względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że następujące zmienne losowe są momentami zatrzymania dla dowolnego zbioru borelowskiego B:
   a) $\tau_1 = \inf\{n\colon\ X_n \in B\}$ – pierwsza wizyta w zbiorze B,
   b) $\tau_k = \inf\{n > \tau_{k-1}\colon\ X_n \in B\}$, $k = 2, 3, \ldots$ – k-ta wizyta w zbiorze B.

3. τ, σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. Wykaż, że
   a) jeśli $\tau \equiv t$, to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$,
   b) jeśli $\tau < \sigma$, to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.
   c) Zakładając dodatkowo, że T jest przeliczalny udowodnij, że $A \in \mathcal{F}_\tau$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \mathcal{F}$ oraz $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t \in T$.

4. Zmienne τ i σ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Udowodnij, że zdarzenia $\{\tau < \sigma\}, \{\tau \leqslant \sigma\}, \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ oraz $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.

5. Wykaż, że moment zatrzymania τ jest $\mathcal{F}_\tau$-mierzalny i podaj przykład momentu zatrzymania τ, takiego, że $\sigma(\tau) \neq \mathcal{F}_\tau$.

6. Niech $(S_n)_{n \geqslant 0}$ oznacza symetryczne błądzenie po prostej startujące z 0, zaś τ pierwszy moment dotarcia przez S_n do 1. Wykaż, że $\mathbf{E}\tau = \infty$.