Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II
grupa I, 9 grudnia 2016

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać pełne rozwiązanie każdego z nich na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa I). Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają gęstość daną wzorem $g(x) = \frac{3}{8}x^2 I_{[0,2]}(x)$. Czy ciąg
$$Y_n = n^{1/3} \min\{X_1, \ldots, X_n\}$$
jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

2. Zmienna losowa X ma funkcję charakterystyczną φ_X.
i) Wykaż, że istnieje zmienna losowa Y, której funkcja charakterystyczna ma postać
$$\varphi_Y = \frac{1}{5 - 4\varphi_X}.$$
ii) Zmienna X ma wartości w przedziale $[0, 1]$. Czy z tego wynika, że zmienna Y jest nieujemna? Czy wynika, że Y jest ograniczona?

3. Zmienna X_n ma rozkład Poissona z parametrem $5n$. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste α dla których ciąg zmiennych losowych
$$n^\alpha (X_n - 5n) \quad n = 1, 2, \ldots$$
jest ciasny.

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym X_k ma rozkład jednostajny na $[-3, 3]$. Czy ciąg
$$Y_n = \frac{X_1 + \sqrt{2}X_2 + \ldots + \sqrt{n}X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}$$
jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

5. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład jednostajny na kuli euklidesowej o środku w zerze i promieniu 5. Oblicz $\mathbb{E}(X + 3Y|Y)$ oraz $\mathbb{E}((X + 3Y)^2|Y)$.

6. Pan Abacki chce kupić stary zegar - w tym celu telefonuje do różnych antykwariatów i pyta o możliwość zakupu odpowiadającego mu zegara. Czas pojedynczej rozmowy telefonicznej ma rozkład wykładniczy o średniej 5 minut. Prawdopodobieństwo tego, że w danym sklepie będzie poszukiwany zegar jest równe 1/10. Znaleźć średni czas wszystkich rozmów, ktory pan Abacki odbędzie w celu odnalezienia pierwszego antykwariatu posiadającego odpowiedni zegar..

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II

grupa II, 9 grudnia 2016

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać pełne rozwiązanie każdego z nich na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz numerem grupy (grupa II). Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają gęstość daną wzorem $g(x) = \frac{1}{4}x^3 I_{[0,2]}(x)$. Czy ciąg
$$Y_n = n^{1/4} \min\{X_1, \ldots, X_n\}$$
jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

2. Zmienna losowa X ma funkcję charakterystyczną φ_X.
i) Wykaż, że istnieje zmienna losowa Y, której funkcja charakterystyczna ma postać
$$\varphi_Y = \frac{1}{4 - 3\varphi_X}.$$
ii) Zmienna X ma wartości w przedziale $[0, 1]$. Czy z tego wynika, że zmienna Y jest nieujemna? Czy wynika, że Y jest ograniczona?

3. Zmienna X_n ma rozkład Poissona z parametrem $3n$. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste α dla których ciąg zmiennych losowych
$$n^{-\alpha}(X_n - 3n) \quad n = 1, 2, \ldots$$
jest ciasny.

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym X_k ma rozkład jednostajny na $[-5, 5]$. Czy ciąg
$$Y_n = \frac{X_1 + \sqrt{2}X_2 + \ldots + \sqrt{n}X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}$$
jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

5. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład jednostajny na kuli euklidesowej o środku w zerze i promieniu 4. Oblicz $\mathbb{E}(2X - Y|Y)$ oraz $\mathbb{E}((2X - Y)^2|Y)$.

6. Pan Abacki chce kupić stary zegar - w tym celu telefonuje do różnych antykwariatów i pyta o możliwość zakupu odpowiadającego mu zegara. Czas pojedynczej rozmowy telefonicznej ma rozkład wykładniczy o średniej 4 minuty. Prawdopodobieństwo tego, że w danym sklepie będzie poszukiwany zegar jest równe 1/5. Znaleźć średni czas wszystkich rozmów, ktory pan Abacki odbędzie w celu odnalezienia pierwszego antykwariatu posiadającego odpowiedni zegar.