Kolokwium z rachunku prawdopodobieństwa
5 grudnia 2005

1. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Czy ciąg zmiennych losowych $Y_n := n\min(|X_1|, \ldots, |X_n|)$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład Poissona o średniej 2. Niech $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Określmy $\tau := \inf\{n \geqslant 1 \colon S_n = S_{n-1}\}$ Oblicz $\mathbf{E}S_\tau$.

3. Załóżmy, że $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ jest martyngałem takim, że $M_0 = 0$ oraz $|M_n - M_{n-1}| = 1$ p.n.
   a) Udowodnij, że $(M_n^2 - n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem;
   b) Oblicz $\mathbf{E}\tau$ dla $\tau := \inf\{n \colon |M_n| = 10\}$.

4. a) Zmienna losowa X ma funkcję charakterystyczną φ. Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej u

$$\mathbf{P}(X = u) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} e^{-iut}\varphi(t)dt.$$

   b) Udowodnij, że rozkład X jest bezatomowy (tzn. $\mathbf{P}(X = c) = 0$ dla wszystkich c) wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |\varphi(t)|^2 dt = 0.$$

5. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbf{E}X_i = 0$, $\mathbf{E}X_i^2 = \sigma^2$. Udowodnij, że dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ różniczkowalnej w 0

$$\sqrt{n}\Big(f\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - f(0)\Big) \to \mathcal{N}\Big(0, \sigma^2(f'(0))^2\Big) \text{ według rozkładu,}$$

   gdzie jak zwykle $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

6. Dwuwymiarowy wektor losowy (X_1, X_2) ma łączny rozkład gaussowski ze średnią $a = (a_1, a_2)$ i macierzą kowariancji $C = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$. Oblicz $\mathbf{E}(X_1|X_2)$. (Wsk. Znaleźć (o ile istnieje) takie ρ, że $\mathrm{Cov}(X_2 - \rho X_1, X_1) = 0$).