Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II*
gr.I, 4 grudnia 2008

1. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego skończonego momentu zatrzymania τ, $f(\tau)$ też jest momentem zatrzymania względem tej samej filtracji co τ.

2. Zmienne X_n i Y_n są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem $2n$. Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu $n^{-5/2}(X_n^3 - Y_n^3)$.

3. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[-1, 1]$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Znajdź wszystkie wielomiany $w(x)$ takie, że $(w(S_n), \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem.

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład wykładniczy ze średnią 2. Czy ciąg $n^{-3/2} \sum_{k=1}^{n} k(X_k - 2)$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

5. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem 2. Określmy $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Niech $\tau = \inf\{n \geqslant 0\colon S_n = S_{n-1}\}$, znajdź funkcję charakterystyczną zmiennej S_τ.

6. Znajdź wszystkie zmienne losowe X takie, że jeśli Y jest zmienną $\mathcal{N}(0, 1)$ niezależną od X, to $2X + Y$ ma ten sam rozkład, co $X + 3Y + 1$.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa II*

gr.II, 4 grudnia 2008

1. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[-2, 2]$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Znajdź wszystkie wielomiany $w(x)$ takie, że $(w(S_n), \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem.

2. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego skończonego momentu zatrzymania τ, $f(\tau)$ też jest momentem zatrzymania względem tej samej filtracji co τ.

3. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład wykładniczy ze średnią 1. Czy ciąg $n^{-3/2} \sum_{k=1}^{n} k(X_k - 1)$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

4. Znajdź wszystkie zmienne losowe X takie, że jeśli Y jest zmienną $\mathcal{N}(0, 1)$ niezależną od X, to $3X + Y$ ma ten sam rozkład, co $X + 2Y - 1$.

5. Zmienne X_n i Y_n są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem $3n$. Zbadaj zbieżność według rozkładu ciągu $n^{-5/2}(X_n^3 - Y_n^3)$.

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem 3. Określmy $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Niech $\tau = \inf\{n \geqslant 0\colon S_n = S_{n-1}\}$, znajdź funkcję charakterystyczną zmiennej S_τ.