

## Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa I\*

gr.I, 9 maja 2012

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde z zadań będzie oceniane w skali 0-10. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Zmienne  $X$  i  $Y$  są niezależne i mają rozkład mają rozkład jednostajny na  $[-3, 3]$ . Oblicz  $\mathbf{E}(\max(X, Y)|X)$ ,  $\mathbf{E}((X + 2Y)^2|X)$  oraz  $\mathbf{E}(X|X+Y)$ .
2. Zmienne  $N$  oraz  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne, przy czym  $N$  ma rozkład Poissona z parametrem 1, a  $X_i$  rozkład wykładniczy z parametrem 2. Niech  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  ( $S = 0$  dla  $N = 0$ ). Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję  $S$ .
3. Zmienne  $X$  i  $Y$  są niezależne i mają rozkład  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Dla jakich  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f(t) := \mathbf{E} \exp(t(2X - 3Y)^2) < \infty?$$

Oblicz  $f(t)$ .

4. Niezależne zmienne losowe  $X_1, X_2, X_3$  mają rozkład jednostajny na  $[0, 3]$ . Znajdź rozkłady zmiennych losowych  $\max(X_1, X_2)$  i  $\max(X_1, X_2) + X_3$ .
5. Przy okrągłym stole w sposób losowy posadzono 15 kobiet i 15 mężczyzn.
  - a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie kobiety nie siedzą obok siebie?
  - b) Oblicz wartość oczekiwaną liczby kobiet siedzących między dwoma mężczyznami. (Proszę o podanie dokładnej odpowiedzi liczbowej).
6. Liczba jajeczek złożonych przez owada ma rozkład Poissona z parametrem 5. Z każdego jajeczka (niezależnie od pozostałych jajeczek) z prawdopodobieństwem 0.8 wykluwa się owad.
  - a) Jakie jest prawdopodobieństwo wyklucia się dokładnie  $k$  owadów?
  - b) Wiemy, że z jajeczek wykluły się 4 owady. Jakie jest prawdopodobieństwo, że owad złożył więcej niż 4 jajeczka?

## Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa I\*

gr.II, 9 maja 2012

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde z zadań będzie oceniane w skali 0-10. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Liczba jajeczek złożonych przez owada ma rozkład Poissona z parametrem 8. Z każdego jajeczka (niezależnie od pozostałych jajeczek) z prawdopodobieństwem 0.5 wykluwa się owad.
  - a) Jakie jest prawdopodobieństwo wyklucia się dokładnie  $k$  owadów?
  - b) Wiemy, że z jajeczek wykluły się 3 owady. Jakie jest prawdopodobieństwo, że owad złożył więcej niż 3 jajeczka?
2. Zmienne  $X$  i  $Y$  są niezależne i mają rozkład  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Dla jakich  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f(t) := \mathbf{E} \exp(t(2X - 5Y)^2) < \infty?$$

Oblicz  $f(t)$ .

3. Przy okrągłym stole w sposób losowy posadzono 20 kobiet i 20 mężczyzn.
  - a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie kobiety nie siedzą obok siebie?
  - b) Oblicz wartość oczekiwaną liczby kobiet siedzących między dwoma mężczyznami. (Proszę o podanie dokładnej odpowiedzi liczbowej).
4. Zmienne  $X$  i  $Y$  są niezależne i mają rozkład jednostajny na  $[-2, 2]$ . Oblicz  $\mathbf{E}(\max(X, Y)|X)$ ,  $\mathbf{E}((X + 3Y)^2|X)$  oraz  $\mathbf{E}(X|X + Y)$ .
5. Zmienne  $N$  oraz  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne, przy czym  $N$  ma rozkład Poissona z parametrem 2, a  $X_i$  rozkład wykładniczy z parametrem 1. Niech  $S = \sum_{i=1}^N X_i$  ( $S = 0$  dla  $N = 0$ ). Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję  $S$ .
6. Niezależne zmienne losowe  $X_1, X_2, X_3$  mają rozkład jednostajny na  $[0, 2]$ . Znajdź rozkłady zmiennych losowych  $\max(X_1, X_2)$  i  $\max(X_1, X_2) + X_3$ .