Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa
grupa I, 19 grudnia 2000

1. Zmienna losowa X o średniej 1 i wariancji 4 ma funkcję charakterystyczną φ. Oblicz $\varphi(0), \varphi'(0)$ oraz $\varphi''(0)$.

2. Zmienne X_n oraz Y_n zbiegają według rozkładu do zmiennej o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2. Wiedząc, że dla wszystkich n zmienne X_n oraz Y_n są niezależne udowodnij, że zmienne $\min(X_n, Y_n)$ zbiegają według rozkładu do zmiennej o rozkładzie wykładniczym z parametrem 4.

3. Zmienne σ oraz τ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Które ze zmiennych: $\sigma + 2$, $\sigma - 2$, σ^2, $\sigma + \tau$ muszą być momentami zatrzymania względem tej samej filtracji? Odpowiedź uzasadnij.

4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrem 5, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Dla liczby rzeczywistej t znajdź taką liczbę a, że $(e^{tS_n - na}, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem.

5. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie takim, że $P(X_i = e^2) = P(X_i = e^{-2}) = \frac{1}{2}$ dla $i = 1, 2, \ldots$. Wykaż, że zmienne
$$Y_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$
zbiegają według rozkładu do pewnej zmiennej Y oraz $\ln Y$ ma rozkład normalny. Oblicz $P(Y \leq e)$.

6. Zmienne losowe ε, X, Y są niezależne przy czym X i Y mają rozkład eksponencjalny z parametrem 3, a $P(\varepsilon = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Znajdź funkcje charakterystyczne zmiennych $Z_1 = \varepsilon X$ oraz $Z_2 = X - Y$. Czy Z_1 ma taki sam rozkład jak Z_2?

Wszystkie zadania będą oceniane w skali 0-10.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa
grupa II, 19 grudnia 2000

1. Zmienne losowe ε, X, Y są niezależne przy czym X i Y mają rozkład eksponencjalny z parametrem 4, a $P(\varepsilon = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Znajdź funkcje charakterystyczne zmiennych $Z_1 = \varepsilon X$ oraz $Z_2 = X - Y$. Czy Z_1 ma taki sam rozkład jak Z_2?

2. Zmienne σ oraz τ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Które ze zmiennych: σ^3, $\sigma + 1$, $\sigma - 1$, , $\sigma + \tau$ muszą być momentami zatrzymania względem tej samej filtracji? Odpowiedź uzasadnij.

3. Zmienna losowa X o średniej 3 i wariancji 1 ma funkcję charakterystyczną φ. Oblicz $\varphi(0), \varphi'(0)$ oraz $\varphi''(0)$.

4. Zmienne X_n oraz Y_n zbiegają według rozkładu do zmiennej o rozkładzie wykładniczym z parametrem 6. Wiedząc, że dla wszystkich n zmienne X_n oraz Y_n są niezależne udowodnij, że zmienne $\min(X_n, Y_n)$ zbiegają według rozkładu do zmiennej o rozkładzie wykładniczym z parametrem 12.

5. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie takim, że $P(X_i = e^3) = P(X_i = e^{-3}) = \frac{1}{2}$ dla $i = 1, 2, \ldots$. Wykaż, że zmienne
$$Y_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$
zbiegają według rozkładu do pewnej zmiennej Y oraz $\ln Y$ ma rozkład normalny. Oblicz $P(Y \geq e^{-1})$.

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrem 3, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Dla liczby rzeczywistej t znajdź taką liczbę a, że $(e^{tS_n - na}, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem.

Wszystkie zadania będą oceniane w skali 0-10.