Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa
grupa I, 18 grudnia 2000

1. Zmienna losowa X ma funkcję charakterystyczną φ. Udowodnij, że X przyjmuje z prawdopodobieństwem 1 wartości całkowite wtedy i tylko wtedy gdy $\varphi(2\pi) = 1$.

2. Zmienne losowe $N, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym N ma rozkład Poissona z parametrem 2, zaś wszystkie X_i mają ten sam rozkład wykładniczy z parametrem 5. Znajdź funkcję charkterystyczną zmiennej losowej $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (przyjmujemy, że $S = 0$ gdy $N = 0$).

3. Zmienne X_n zbiegają według rozkładu do zmiennej X, a zmienne $-\frac{1}{2}\ln X_n$ do zmiennej Y. Wykaż, że X ma rozkład jednostajny na $[0,1]$ wtedy i tylko wtedy gdy Y ma rozkład wykładniczy z parametrem 2.

4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(1,2)$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Dla liczby rzeczywistej t znajdź taką liczbę zespoloną $a \neq 0$, że $(a^n e^{itS_n}, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem.

5. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Cauchy'ego, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Które z następujących zmiennych losowych są momentami zatrzymania względem $(\mathcal{F}_n)$:
a) $\sigma_1 = \inf\{n : X_n \geq n\}$,
b) $\sigma_2 = \inf\{n \geq 2 : X_n \geq X_{n-1}\}$,
c) $\sigma_3 = \inf\{n : X_{n+1} \geq X_n\}$?

6. W czasie szczytu liczba rozmów łaczona przez pewną centralę w ciągu godziny ma rozkład Poissona ze średnią 100. Zakładając niezależność liczby rozmów w różnych godzinach oszacuj prawdopodobieństwo, że centrala połaczy w ciągu 400 kolejnych godzin szczytu między 40 a 42 tysiące rozmów.

Wszystkie zadania będą oceniane w skali 0-10.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa
grupa II, 18 grudnia 2000

1. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym z parametrem 0.5, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Które z następujących zmiennych losowych są momentami zatrzymania względem $(\mathcal{F}_n)$:
   a) $\sigma_1 = \inf\{n : X_n = n\}$,
   b) $\sigma_2 = \inf\{n \geq 2 : X_n = X_{n-1}\}$,
   c) $\sigma_3 = \inf\{n : X_{n+1} = X_n\}$?

2. Zmienne losowe $N, X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym N ma rozkład Poissona z parametrem 2, zaś wszystkie X_i mają ten sam rozkład jednostajny na $[-2, 2]$ Znajdź funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (przyjmujemy, że $S = 0$ gdy $N = 0$).

3. Zmienne X_n zbiegają według rozkładu do zmiennej X, a zmienne $-\ln \frac{X_n}{2}$ do zmiennej Y. Wykaż, że X ma rozkład jednostajny na $[0, 2]$ wtedy i tylko wtedy gdy Y ma rozkład wykładniczy z parametrem 1.

4. Zmienna losowa X ma funkcję charakterystyczną φ. Udowodnij, że X przyjmuje z prawdopodobieństwem 1 wartości całkowite parzyste wtedy i tylko wtedy gdy $\varphi(\pi) = 1$.

5. W czasie szczytu liczba rozmów łaczona przez pewną centralę w ciągu godziny ma rozkład Poissona ze średnią 40. Zakładając niezależność liczby rozmów w różnych godzinach oszacuj prawdopodobieństwo, że centrala połaczy w ciągu 1000 kolejnych godzin szczytu między 38 a 40 tysięcy rozmów.

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(2, 1)$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Dla liczby rzeczywistej t znajdź taką liczbę zespoloną $a \neq 0$, że $(a^n e^{itS_n}, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem.

Wszystkie zadania będą oceniane w skali 0-10.