Kolokwium, 9.04.2001 grupa I

1. Zdarzenia A, B, C są niezależne, przy czym $P(A) = P(B) = 1/2$, $P(C) = 1/3$. Oblicz $P(A - (B \cup C))$.

2. Rzucamy trzy razy monetą, a następnie tyle razy kostką ile wypadło orłów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
   a) wyrzucimy co najmniej jedną szóstkę ?
   b) wyrzuciliśmy same orły jeśli wiadomo, że wyrzuciliśmy przynajmniej jedną szóstkę ?

3. Niech X ma gęstość $f(x) = Ce^{-|x|}$. Znaleźć C, $P(X > -1)$ i dystrybuantę.

4. Niech X ma rozkład wykładniczy z parametrem 2. Znaleźć rozkład
   a) $Y = e^{-X}$;
   b) $Z = \min(X, X^3)$.
   Czy są to rozkłady ciągłe? Jeśli tak, to znaleźć gęstość.

5. Jest n osób $A_1, A_2, ..., A_n$. Osoba A_1 dostaje kartkę ze znakiem $+$. Z prawdopodobieństwem p, $0 < p < 1$, zmienia znak na przeciwny i podaje kartkę osobie A_2. Ona znowu z prawdopodobieństwem p zmienia znak na przeciwny i podaje kartkę osobie A_3, itd. Na końcu po oddaniu kartki przez osobę A_n zaobserwowano znak $+$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba A_1 nie zmieniła znaku?

6. Niech X_n oznacza najdłuższą serię orłów w n rzutach monetą (np. dla ciągu OORROROOORO, $X_{11} = 3$). Udowodnij, że
   a) $P(X_n \geqslant \lambda \log_2 n) \longrightarrow 0$ dla $\lambda > 1$,
   b) $P(X_n \geqslant \lambda \log_2 n) \longrightarrow 1$ dla $0 < \lambda < 1$.

Krótkie odpowiedzi

1. $\frac{1}{6}$.

2. a) $\frac{397}{1728}$; b) $\frac{91}{397}$.

3. $C = \frac{1}{2}, P(X > -1) = 1 - \frac{1}{2}e^{-1}$, dystrybuanta $1 - \frac{1}{2}e^{-t}$ dla $t \geqslant 0$ i $\frac{1}{2}e^{t}$ dla $t < 0$.

4. Oba rozkłady są ciągłe. Y ma gęstość $2tI_{\{0 \leqslant t \leqslant 1\}}$, zaś Z ma gęstość $2e^{-2t}I_{\{t \geqslant 1\}} + \frac{2}{3}t^{-2/3}e^{-2t^{1/3}}I_{\{0<t<1\}}$.

5. $\frac{(1-p)(1+(1-2p)^{n-1}}{1+(1-2p)^n}$.

Kolokwium, 9.04.2001 grupa II

1. Zdarzenia A, B, C są niezależne, przy czym $P(A) = P(B) = 2/3$, $P(C) = 1/2$. Oblicz $P(A - (B \cup C))$.

2. Rzucamy trzy razy monetą, a następnie tyle razy kostką ile wypadło reszek. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że
   a) wyrzucimy co najmniej jedną jedynkę ?
   b) wyrzuciliśmy same orły jeśli wiadomo, że wyrzuciliśmy przynajmniej jedną jedynkę ?

3. Niech X ma gęstość $f(x) = 2Ce^{-|x|}$. Znaleźć C, $P(X > -2)$ i dystrybuantę.

4. Niech X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Znaleźć rozkład
   a) $Y = e^{-X}$;
   b) $Z = \min(X, X^4)$.
   Czy są to rozkłady ciągłe? Jeśli tak, to znaleźć gęstość.

5. Jest n osób $A_1, A_2, ..., A_n$. Osoba A_1 dostaje kartkę ze znakiem $+$. Z prawdopodobieństwem p, $0 < p < 1$, zmienia znak na przeciwny i podaje kartkę osobie A_2. Ona znowu z prawdopodobieństwem p zmienia znak na przeciwny i podaje kartkę osobie A_3, itd. Na końcu po oddaniu kartki przez osobę A_n zaobserwowano znak $+$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba A_1 nie zmieniła znaku?

6. Niech X_n oznacza najdłuższą serię orłów w n rzutach monetą (np dla ciągu OORROROOORO, $X_{11} = 3$). Udowodnij, że
   a) $P(X_n \geqslant \lambda \log_2 n) \longrightarrow 0$ dla $\lambda > 1$,
   b) $P(X_n \geqslant \lambda \log_2 n) \longrightarrow 1$ dla $0 < \lambda < 1$.

Krótkie odpowiedzi

1. $\frac{1}{9}$.

2. a) $\frac{397}{1728}$; b) 0.

3. $C = \frac{1}{4}, P(X > -2) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2}$, dystrybuanta $1 - \frac{1}{2}e^{-t}$ dla $t \geqslant 0$ i $\frac{1}{2}e^{t}$ dla $t < 0$.

4. Oba rozkłady są ciągłe. Y ma gęstość $tI_{\{0 \leqslant t \leqslant 1\}}$, zaś Z ma gęstość $e^{-t}I_{\{t \geqslant 1\}} + \frac{1}{4}t^{-3/4}e^{-t^{1/4}}I_{\{0<t<1\}}$.

5. $\frac{(1-p)(1+(1-2p)^{n-1}}{1+(1-2p)^n}$.