Kartkówka 4

gr.1, 12 stycznia 2009

1. Niech $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} X_k$, gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie jednostajnym na $(-1, 1)$.
a) Znajdź ciąg (a_n) taki, że $(S_n^2 - a_n)_{n \geqslant 0}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez ciąg (X_n).
b) Czy ten martyngał jest zbieżny prawie na pewno? (Wsk.: $|a-b| \leqslant (a-b) + 2b$ dla $a, b > 0$.)

2. Dany jest ciąg zmiennych losowych X_n o wartościach całkowitych taki, że $X_0 = 1$, $|X_n - X_{n-1}| \leqslant 1$, $\limsup_{n\to\infty} |X_n| = \infty$ p.n. oraz $(X_n^2 - \frac{1}{4}n)$ jest martyngałem względem pewnej filtracji. Niech $\tau = \inf\{n\colon |X_n| = 5\}$, oblicz $\mathbb{E}\tau$.

Kartkówka 4

gr.2, 12 stycznia 2010

1. Dany jest ciąg zmiennych losowych X_n o wartościach całkowitych taki, że $X_0 = 2$, $|X_n - X_{n-1}| \leqslant 1$, $\limsup_{n\to\infty} |X_n| = \infty$ p.n. oraz $(X_n^2 - \frac{1}{5}n)_{n\geqslant 0}$ jest martyngałem względem pewnej filtracji. Niech $\tau = \inf\{n\colon |X_n| = 6\}$, oblicz $\mathbb{E}\tau$.

2. Niech $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} X_k$, gdzie $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie jednostajnym na $(-1, 1)$.
a) Znajdź ciąg (a_n) taki, że $(S_n^2 - a_n)_{n \geqslant 0}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez ciąg (X_n).
b) Czy ten martyngał jest zbieżny prawie na pewno? (Wsk.: $|a-b| \leqslant (a-b) + 2b$ dla $a, b > 0$.)