Kartkówka 2

gr.1, 14 grudnia 2008

1. Wykaż, że jeśli τ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ oraz $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełnia $f(n) \geqslant n$ dla wszystkich n, to $f(\tau)$ jest momentem zatrzymania względem tej samej filtracji.

2. $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ jest martyngałem takim, że $M_0 = 0$, $M_{n+1} - M_n \in \{0, 1, -1\}$ p.n. oraz $(5M_n^2 - n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ jest martyngałem. Oblicz $\mathbf{E}\tau$ dla $\tau = \inf\{n\colon |M_n| = 6\}$.

Kartkówka 2

gr.2, 14 grudnia 2008

1. $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ jest martyngałem takim, że $M_0 = 0$, $M_{n+1} - M_n \in \{0, 1, -1\}$ p.n. oraz $(4M_n^2 - n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ jest martyngałem. Oblicz $\mathbf{E}\tau$ dla $\tau = \inf\{n\colon |M_n| = 4\}$.

2. Wykaż, że jeśli τ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ oraz $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełnia $f(n) \geqslant n$ dla wszystkich n, to $f(\tau)$ jest momentem zatrzymania względem tej samej filtracji.

Kartkówka 2

gr.3, 14 grudnia 2008

1. Zmienne X_i są niezależne, $\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = 1/4$, $\mathbf{P}(X_i = 0) = 1/2$. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
   a) Znajdź a takie, że $(S_n^2 - an, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.
   b) Oblicz $\mathbf{E}\tau$ dla $\tau = \inf\{n\colon |S_n| = 4\}$.

2. $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ jest martyngałem takim, że $\mathbf{E}M_n^2 < \infty$. Dla jakich a, b, c, ciąg $(aM_n^2 + bM_n + c, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ musi być podmartyngałem, a dla jakich martyngałem?

Kartkówka 2

gr.4, 14 grudnia 2008

1. $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ jest martyngałem takim, że $\mathbf{E}M_n^2 < \infty$. Dla jakich a, b, c, ciąg $(aM_n^2 + bM_n + c, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ musi być martyngałem, a dla jakich nadmartyngałem?

2. Zmienne X_i są niezależne, $\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = 1/6$, $\mathbf{P}(X_i = 0) = 2/3$. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
   a) Znajdź a takie, że $(S_n^2 - an, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.
   b) Oblicz $\mathbf{E}\tau$ dla $\tau = \inf\{n\colon |S_n| = 5\}$.