Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:.......................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II, grupa I, 31 stycznia 2017

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa I) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–7 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Odpowiedzi proszę podawać w jak najprostszej postaci, nie zawierającej nieskończonej liczby operacji arytmetycznych. Można uzywać w rozwiązaniach dystrybuanty kanonicznego rozkładu normalnego.

1. Rzucamy kostką dopóki nie wyrzucimy trzech piątek pod rząd.
   a) Znajdź wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.
   b) Znajdź wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek.

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład wykładniczy ze średnią 3.
   a) Znajdź liczby a_n takie, że zmienne dane wzorem
$$M_0 = 1, \quad M_n = \prod_{k=1}^{n} \left(a_k + \frac{X_k}{k^2} \right), \ n \geqslant 1$$
   tworzą martyngał względem filtracji generowanej przez ciąg (X_n).
   a) Czy ten martyngał jest zbieżny prawie na pewno?
   b) Czy ciąg (M_n^2) jest jednostajnie całkowalny?

3. Niech S_n będzie symetrycznym błądzeniem losowym na $\mathbb{Z}$ startującym z 0 oraz $\tau = \inf\{n\colon S_n = 10\}$.
   a) Oblicz $\mathbb{P}(\tau < \infty)$.
   b) Znajdź liczbę $a > 0$ taką, że $e^{2S_n - an}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez S_n.
   c) Oblicz $\mathbb{E}e^{-a\tau}$, gdzie a jest liczbą z punktu ii).

4. W pewnym sklepie są cztery kasy - trzy zwykłe, jedna ekspresowa (dla klientów kupujących co najwyżej 10 artykułów). Średni czas obsługi w zwykłej kasie to 120 sekund, a w kasie ekspresowej 60 sekund, zaś standardowe odchylenie wynosi odpowiednio 60 i 30 sekund. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo tego, że
   a) w ciągu godziny każda z kas zwykłych obsłuży przynajmniej 30 klientów, a kasa ekspresowa 60 (zakładamy, że kasy obsługują klientów bez przerw),
   b) czas obsługi 40 klientów w kasie ekspresowej będzie o więcej niż 5 minut dłuższy niż 20 klientów w pierwszej z kas zwykłych.

5. Niech (X_n) oznacza błądzenie symetryczne po $\{0, 1, \ldots, 4\}$ z odbiciem, to znaczy łańcuch Markowa, którego macierz przejścia spełnia $p_{0,1} = p_{4,3} = 1$, $p_{k,k+1} = p_{k,k-1} = \frac{1}{2}$ dla $k = 1, 2, 3$.
   a) Wykaż, że ciąg Y_n dany wzorem $Y_n = X_{2n}$, $n = 0, 1, \ldots$ jest łańcuchem Markowa i wyznacz jego macierz przejścia.
   b) Znajdź wszystkie rozkłady stacjonarne dla (X_n) i (Y_n).

6. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[0,5]$. Niech

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad \tau := \inf\{n \geqslant 1\colon\ X_n \geqslant 4\}.$$

Znajdź funkcję charakterystyczną zmiennych τ i S_τ.

Część testowa

1. (2pkt) Podaj definicję ciasności rodziny miar probabilistycznych $(\mu_i)_{i\in I}$ na $\mathbb{R}$.

2. (4pkt) Zmienne X_n są niezależne i zbiegają według rozkładu do zmiennej gaussowskiej o średniej 1 i wariancji 2. Oblicz
i) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant 0) =$
ii) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n + X_{n+1} \leqslant 0) =$
iii) $\lim_{n\to\infty} \varphi_{2X_n - X_{n+1}}(t) =$

3. (2pkt) Podaj definicję warunkowej wartości oczekiwanej całkowalnej zmiennej losowej X względem σ-ciała $\mathcal{G}$: $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = Y$ p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy

4. (4pkt) Niech X_n będzie łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów $\{1,2,3\}$ i macierzy przejścia $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Oblicz
$\mathbb{P}(X_2 = X_1 | X_0 = 1)$=
$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1 | X_0 = 2) =$

5. (2pkt) Podaj definicję momentu zatrzymania τ względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ oraz sigma ciała $\mathcal{F}_\tau$.

6. (3pkt) X i Y są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie wykładniczym ze średnią 2. Oblicz
$\mathbb{E}(XY|X) =$
$\mathbb{E}((X+Y)^2|X) =$

7. (2pkt) Wyraź za pomocą funkcji charakterystycznych niezależność zmiennych X i Y.

8. (3pkt) Wektor losowy $X = (X_1, X_2)$ ma rozkład gaussowski ze średnią zero i macierzą kowariancji $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Wówczas $\mathbb{E}(X_1|X_2) =$.

9. (3pkt) Podaj definicję zbieżności według rozkładu zmiennych X_n do zmiennej X i napisz jak ją można wyrazić w terminach zbieżności dystrybuant.

Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:.......................

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa II, grupa II, 31 stycznia 2017

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy (grupa II) i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–7 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Odpowiedzi proszę podawać w jak najprostszej postaci, nie zawierającej nieskończonej liczby operacji arytmetycznych. Można używać w rozwiązaniach dystrybuanty kanonicznego rozkładu normalnego.

1. Rzucamy kostką dopóki nie wyrzucimy trzech trójek pod rząd.
   a) Znajdź wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.
   b) Znajdź wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek.

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład wykładniczy ze średnią 5.
   a) Znajdź liczby a_n takie, że zmienne dane wzorem
   $$M_0 = 1, \quad M_n = \prod_{k=1}^{n} \left(a_k + \frac{X_k}{k^3} \right), \ n \geqslant 1$$
   tworzą martyngał względem filtracji generowanej przez ciąg (X_n).
   a) Czy ten martyngał jest zbieżny prawie na pewno?
   b) Czy ciąg (M_n^2) jest jednostajnie całkowalny?

3. Niech S_n będzie symetrycznym błądzeniem losowym na $\mathbb{Z}$ startującym z 0 oraz $\tau = \inf\{n\colon\ S_n = 8\}$.
   a) Oblicz $\mathbb{P}(\tau < \infty)$.
   b) Znajdź liczbę $a < 0$ taką, że $e^{3S_n + an}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez S_n.
   c) Oblicz $\mathbb{E}e^{a\tau}$, gdzie a jest liczbą z punktu ii).

4. W pewnym sklepie są trzy kasy - dwie zwykłe, jedna ekspresowa (dla klientów kupujących co najwyżej 10 artykułów). Średni czas obsługi w zwykłej kasie to 180 sekund, a w kasie ekspresowej 90 sekund, zaś standardowe odchylenie wynosi odpowiednio 60 i 30 sekund. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo tego, że
   a) w ciągu dwóch godziny każda z kas zwykłych obsłuży przynajmniej 40 klientów, a kasa ekspresowa 80 (zakładamy, że kasy obsługują klientów bez przerw)
   b) czas obsługi 40 klientów w kasie ekspresowej będzie o więcej niż 3 minuty dłuższy niż 20 klientów w pierwszej z kas zwykłych.

5. Niech (X_n) oznacza błądzenie symetryczne po $E = \{1, \ldots, 5\}$ z odbiciem, to znaczy łańcuch Markowa, którego macierz przejścia spełnia $p_{1,2} = p_{5,4} = 1$, $p_{k,k+1} = p_{k,k-1} = \frac{1}{2}$ dla $2 \leqslant k \leqslant 4$.
   a) Wykaż, że ciąg Y_n dany wzorem $Y_n = X_{2n}$, $n = 0, 1, \ldots$ jest łańcuchem Markowa i wyznacz jego macierz przejścia.
   b) Znajdź wszystkie rozkłady stacjonarne dla (X_n) i (Y_n).

6. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[0, 4]$. Niech

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad \tau := \inf\{n \geqslant 1\colon\ X_n \leqslant 1\}.$$

Znajdź funkcję charakterystyczną zmiennych τ i S_τ.

Część testowa

1. (3pkt) Podaj definicję zbieżności według rozkładu zmiennych X_n do zmiennej X i napisz jak ją można wyrazić w terminach zbieżności dystrybuant.

2. (4pkt) Zmienne X_n są niezależne i zbiegają według rozkładu do zmiennej gaussowskiej o średniej -1 i wariancji 4. Oblicz
i) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant 0) =$
ii) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n + X_{n+1} \geqslant 0) =$
iii) $\lim_{n\to\infty} \varphi_{2X_n+3X_{n+1}}(t) =$

3. (2pkt) Wyraź za pomocą funkcji charakterystycznych niezależność zmiennych X i Y.

4. (2pkt) Podaj definicję warunkowej wartości oczekiwanej całkowalnej zmiennej losowej X względem σ-ciała $\mathcal{G}$: $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = Y$ p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy

5. (4pkt) Niech X_n będzie łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów $\{1, 2, 3\}$ i macierzy przejścia $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Oblicz
$\mathbb{P}(X_2 = X_1 | X_0 = 1)=$
$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 | X_0 = 1) =$

6. (3pkt) X i Y są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie wykładniczym ze średnią 5. Oblicz
$\mathbb{E}(XY|Y) =$
$\mathbb{E}((X-Y)^2|Y) =$

7. (3pkt) Wektor losowy $X = (X_1, X_2)$ ma rozkład gaussowski ze średnią zero i macierzą kowariancji $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Wówczas $\mathbb{E}(X_2|X_1) =$.

8. (2pkt) Podaj definicję ciasności rodziny miar probabilistycznych $(\mu_i)_{i\in I}$ na $\mathbb{R}$.

9. (2pkt) Podaj definicję momentu zatrzymania τ względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ oraz sigma ciała $\mathcal{F}_\tau$.