

Egzamin Poprawkowy z Rachunku Prawdopodobieństwa

10 września 2002

1. Zmienne X_1, X_2, \dots są niezależne i mają jednakowy rozkład Poissona z parametrem 2. Udowodnij, że ciąg zmiennych losowych

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{X_1 X_2 + X_2 X_3 + \dots + X_n X_{n+1}}$$

jest zbieżny prawie na pewno i znajdź jego granicę.

2. Z 52 kartowej talii wylosowano bez zwracania 10 kart. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby pików wśród wylosowanych kart.
3. Zmienne X, Y i Z są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[0, 5]$. Oblicz $\mathbf{E}(XY|X)$, $\mathbf{E}((X+Y)^2|X)$ oraz $\mathbf{E}(X+Y|Y+Z)$.
4. Zmienne X, Y, Z są niezależne i mają standardowy rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Czy zmienna $(X+2Y-3Z)^2$ ma rozkład ciągły? Jeśli tak to znajdź jej gęstość.
5. Zmienne X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, a Y wykładniczy z parametrem 3. Znajdź rozkład zmiennej $X+Y$ i oblicz $\mathbf{P}(X \geq Y)$.
6. Na rynku telekomunikacyjnym w pewnym kraju działają 3 sieci komórkowe. Do sieci A należy 25% klientów, do sieci B 35%, a do sieci C pozostałych 40%. Wśród klientów sieci A 60% ma telefony bezabonamentowe (na kartę), w sieci B i C jest to odpowiednio 50% i 45% klientów.
- a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwu losowo wybranych użytkowników telefonii komórkowej należy do tej samej sieci?
- b) Losowo wybrany użytkownik ma telefon na kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że używa on sieci A?
7. Zdarzenia A_1, A_2, \dots są niezależne oraz $\mathbf{P}(A_n) < 1$ dla wszystkich n . Udowodnij, że jeśli prawie na pewno zachodzi przynajmniej jedno ze zdarzeń A_n to prawie na pewno zachodzi nieskończenie wiele spośród zdarzeń A_n .
8. Losowo wybrano jedną spośród liczb całkowitych od 0 do 999999. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrana liczba ma w zapisie dziesiętnym
- a) przynajmniej jedną cyfrę równą 1
- b) dokładnie jedną cyfrę równą 1
- c) przynajmniej jedną cyfrę równą 1 i przynajmniej jedną cyfrę równą 9
- d) sumę cyfr równą 8.
9. Niech X, X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Udowodnij, że ciąg zmiennych $Y_n = \max(|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|)$ jest zbieżny prawie na pewno do $\|X\|_\infty$.

Wszystkie zadania będą oceniane w skali 0-10, do otrzymania oceny bardzo dobrej wystarczy rozwiązanie 7 zadań.