Zadania Domowe z Rachunku Prawdopodobieństwa

Zestaw 1 - 15 lutego 2001 (do oddania 22 lutego)

1. Na $2n$ ponumerowanych miejscach przy okrągłym stole rozsadzono w sposób losowy n chłopców i n dziewczyn. Oblicz prawdopodobieństwo, że żadne dwie dziewczyny nie siedzą obok siebie.

2. Oblicz prawdopodobieństwo, że w grze w pokera talią 24 kartową dostaniemy "z ręki"
   a) parę
   b) dwie pary
   c) trójkę
   d) fulla.

Zestaw 2 - 22 lutego 2001 (do oddania 1 marca)

1. Oblicz prawdopodobieństwo, że w losowo wybranym rozwiązaniu równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ w liczbach naturalnych
   a) wszystkie x_i są dodatnie
   b) wszystkie x_i są parzyste
   c) $x_1 + x_2 = 10$.

2. Roztrzepana sekretarka umieściła w sposób losowy n listów w n uprzednio zaadresowanych kopertach. Oblicz prawdopodobieństwo, że dokładnie k listów trafi do właściwych adresatów.

Zestaw 3 - 1 marca 2001 (do oddania 8 marca)

1. Rzucamy monetą dopóki nie wypadną 2 orły pod rząd. Oblicz prawdopodobieństwo, że rzucimy dokładnie k razy.

2. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano w sposób losowy 3 liczby a, b, c. Oblicz prawdopodobieństwo, że
   i) $a < b < c$
   ii) $c < a + b$.

Zestaw 4 - 8 marca 2001 (do oddania 15 marca)

1. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano w sposób losowy 3 liczby a, b, c. Rozważamy następujące dwa zdarzenia: A–liczba a jest największa z wylosowanych, B–liczba a jest nie większa niż $1/2$. Oblicz $P(A|B)$ i $P(B|A)$.

2. W urnie znajduje się a kul białych i b kul czarnych. Powtarzamy następujące doświadczenie: losujemy z urny kulę a następnie zwracamy ją do urny dodając c kul tego samego koloru. Oblicz prawdopodobieństwo, że n-ta wylosowana kula będzie biała.

3. Przy założeniach poprzedniego zadania oblicz prawdopodobieństwo, że pierwsza wylosowana kula była biała, jeśli za drugim razem wylosowano kulę białą.

Zestaw 5 - 15 marca 2001 (do oddania 15 marca)

1. Rzucamy n razy monetą. Niech A_i dla $i = 1, 2, \dots, n$ oznacza zdarzenie, że wyrzucimy w i-tym rzucie orła, zaś A_{n+1}, że wyrzucimy w n rzutach parzystą liczbę orł'ow. Udowodnij, że dowolne n spośród zdarzeń A_i jest niezależnych, ale zdarzenia A_i nie są niezależne.

2. Prawdopodobieństwo, że koszykarz trafi do tarczy w pojedynczym rzucie wynosi 0.8, zakładając, że rzuty są oddawane niezależnie oblicz prawdopodobieństwo, że koszykarz
   a) spudłował 1 i 3 rzut, jeśli wiadomo, że w 10 próbach spudłował dokładnie 3 razy,
   b) spudłował w 10 próbach dokładnie 3 razy, jeśli wiadomo, że spudłował 1 i 3 rzut,
   c) w 100 rzutach spudłuje parzystą liczbę razy.

Zestaw 6 - 22 marca 2001 (do oddania 29 marca)

1. Liczbę nazywamy normalną jeśli w jej rozwinięciu dziesiętnym występują wszystkie możliwe skończone ciągi cyfr. Wykaż, że losowo wybrana liczba z przedziału $[0, 1]$ jest normalna.

2. Zmienna losowa X przyjmuje wartości naturalne oraz
   $$P(X \geqslant k + l | X \geqslant k) = P(X \geqslant l) \text{ dla } k, l = 0, 1, 2 \dots$$
   (zakładamy, że $P(X \geqslant k) > 0$ dla wszystkich k). Udowodnij, że X ma rozkład geometryczny.

Zestaw 7 - 29 marca 2001 (do oddania 5 kwietnia)

1. Udowodnij, że zmienna losowa X przyjmuje nie więcej niż trzy wartości z prawdopodobieństwem 1 (tzn. $P(X \in \{a, b, c\}) = 1$ dla pewnych a, b, c) wtedy i tylko wtedy gdy dystrybuanta X przyjmuje nie więcej niż 4 wartości.

2. Zmienna X ma rozkład eksponencjalny z parametrem 3, które z następujących zmiennych $\max(X, X^2), e^{2X+4}, \min(X, 3)$ mają gęstości i ile one wynoszą (o ile istnieją)?

Zestaw 8 - 12 kwietnia 2001 (do oddania 19 kwietnia)

1. Do klasy chodzi 16 uczniów, na każdej lekcji nauczyciel pyta losowo wybraną osobę. Oblicz wartość oczekiwaną liczby osób przepytanych w ciągu 20 kolejnych lekcji.

2. Zmienna X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ. Znajdź wariancję X oraz oblicz Ee^{tX} dla $t \in R$.

Zestaw 9 - 19 kwietnia 2001 (do oddania 26 kwietnia)

1. Agata gra z Karolem w orła i reszkę monetą niekoniecznie symetryczną. W pojedynczej grze Agata wygrywa z prawdopodobieństwem p, a Karol z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Gra się kończy gdy któremuś z graczy zabraknie pieniędzy. Na początku gry Agata ma 20 złotych a Karol 30 złotych. Co się bardziej opłaca Agacie wybrać w pojedynczej grze stawkę 1 zł. czy 2 zł (rozpatrz przypadki $p < 1/2, p = 1/2, p > 1/2$)?

2. Udowodnij, że jeśli zmienna X przyjmuje tylko wartości całkowite to
$$E|X| = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geqslant n).$$

Zestaw 10 - 26 kwietnia 2001 (do oddania 10 maja)

1. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[1, 3]$. Znajdź rozkład zmiennych $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ oraz $Z = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

2. Zmienna X ma skończoną wariancję. Oblicz $\min_{t\in R} E(X-t)^2$.

Zestaw 11 - 10 maja 2001 (do oddania 17 maja)

1. Zmienne X, Y są niezależne o rozkładzie geometrycznym z parametrami p_1 i p_2 odpowiednio. Znajdź rozkład $X+Y$ oraz $P(X<Y)$.

2. Zmienne X, Y, ε są nieżależne przy czym X i Y mają rozkład jednostajny na $[-1,2]$, zaś $P(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$. Znajdź rozkład $X+Y$, εX oraz $\varepsilon + X$.

Zestaw 12 - 17 maja 2002 (do oddania 24 maja)

1. $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie eksponencjalnym z parametrem 1. Niech $S_0 = 0$ oraz $S_n = X_1 + X_2 + \ldots X_n$ dla $n > 0$. Dla $t > 0$ zdefiniujmy
$$N(t) = \inf\{n \geqslant 0 : S_n \geqslant t\}.$$
Znajdź rozkład $N(t)$.

2. Udowodnij, że
a) $t^p P(|X| > t) \leqslant E|X|^p I_{\{|X|>t\}}$ dla $t > 0$;
b) $\lim_{t\to\infty} t^p P(|X| > t) = 0$, jeśli $E|X|^p < \infty$.