

Zadania zaliczeniowe z Procesów Stochastycznych

1. Niech $(W_t)_{t \geq 0}$ będzie ruchem Browna startującym z zera, rozpatrzmy następujące trzy procesy
 - a) $e^{-2t}W_{e^{4t}}, t \in (-\infty, \infty)$
 - b) $W_{t+1} - W_t, t \geq 0$
 - c) $tW_{1/t}, t > 0$.

Znajdź funkcję wartości średniej i kowariancji dla tych procesów. Które z tych procesów są stacjonarne, a które mają przyrosty niezależne?

2. Ustalmy $T > 0$ i liczby rzeczywiste a, b . Proces gaussowski $(X_t)_{t \in [0, T]}$ nazywamy mostem Browna z a do b jeśli $EX_t = a(1 - \frac{t}{T}) + b\frac{t}{T}$ oraz $\text{Cov}(X_t, X_s) = \min(s, t) - \frac{st}{T}$ (zakładamy, że wiadomo, iż taki proces istnieje)
 - a) udowodnij, że istnieje modyfikacja procesu X_t mająca ciągłe trajektorie
 - b) co można powiedzieć o hölderowskości trajektorii ciągłej modyfikacji tego procesu?

3. Niech W_t będzie ruchem Browna startującym z zera, $a > 0 > b$ oraz $T = \inf\{t : W_t > a + bt\}, T_{\{a\}} = \inf\{t : W_t = a\}$. Pokaż, że dla $\lambda > 0$

$$Ee^{-\lambda T} = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}$$

i wywnioskuj stąd, że

$$Ee^{-\lambda T_{\{a\}}} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}.$$

(Wskazówka: $e^{sW_t - s^2t/2}$ jest martyngałem dla dowolnego parametru s , zastosuj twierdzenie Dooba)

4. Niech W_t będzie procesem Wienera startującym z zera, zaś τ momentem zatrzymania względem filtracji $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{\leq t}^W$ takim, że $\tau < \infty$ p.n.. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych u_1, \dots, u_k oraz $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ zachodzi

$$E(e^{i \sum_{l=1}^k u_l (W_{\tau+t_l} - W_{\tau+t_{l-1}})} | \mathcal{F}_\tau) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^k u_l^2 (t_l - t_{l-1})} \text{ p.n.}$$

Wywnioskuj stąd, że $(W_{t+\tau} - W_\tau)_{t \geq 0}$ jest procesem Wienera niezależnym od \mathcal{F}_τ .