

## Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 1

1. Znajdź rozkład zmiennej  $5W_1 - W_3 + W_7$ .
2. Dla jakich parametrów  $a$  i  $b$ , zmienne  $aW_1 - W_2$  oraz  $W_3 + bW_5$  są niezależne?
3. Znajdź rozkład wektora losowego  $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n})$  dla  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ .
4. Udowodnij, że  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{t} = 0$  p.n..
5. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera:
  - a)  $X_t = -W_t$  (odbicie),
  - b)  $Y_t = c^{-1/2}W_{ct}$ ,  $c > 0$  (przeskalowanie czasu),
  - c)  $Z_t = tW_{1/t}$  dla  $t > 0$  oraz  $Z_0 = 0$  (inwersja czasu),
  - d)  $U_t = W_{T+t} - W_T$ ,  $T \geq 0$ ,
  - e)  $V_t = W_t$  dla  $t \leq T$ ,  $V_t = 2W_T - W_t$  dla  $t > T$ , gdzie  $T \geq 0$ .
6. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera są nieograniczone.
7. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera nie są jednostajnie ciągłe na  $\mathbb{R}_+$ .
8. Niech  $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}\}$ , gdzie  $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{k_n}^{(n)} = b$  będzie ciągiem podziałów odcinka  $[a, b]$  oraz  $\|\pi_n\| := \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$  oznacza średnicę  $\pi_n$ . Udowodnij, że

$$S_n := \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \rightarrow b - a \quad \text{w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ przy } n \rightarrow \infty,$$

jeśli  $\|\pi_n\| \rightarrow 0$  oraz  $S_n \rightarrow b - a$  p.n., jeśli  $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$ .

9. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.
10. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Wienera są funkcjami nieróżniczkowalnymi w żadnym punkcie przedziału  $[0, \infty)$ .

*Wskazówki:*

- a) Jeśli funkcja  $f$  jest różniczkowalna w jakimś punkcie przedziału  $[0, 1]$ , to istnieje liczba  $M < \infty$  taka, że dla odpowiednio dużych  $n$  istnieje  $0 \leq j \leq n - 3$  taka, że  $|f((j+1)/n) - f(j/n)| \leq M/n$ ,  $|f((j+2)/n) - f((j+1)/n)| \leq M/n$  oraz  $|f((j+3)/n) - f((j+2)/n)| \leq M/n$ .
- b) Wykaż, że  $\mathbb{P}(|W_{(j+1)/n} - W_{j/n}| \leq M/n, |W_{(j+2)/n} - W_{(j+1)/n}| \leq M/n, |W_{(j+3)/n} - W_{(j+2)/n}| \leq M/n) \leq CMn^{-3/2}$  i wywioskuj stąd nieróżniczkowalność trajektorii na przedziale  $[0, 1]$ .

## Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 2

1. Udowodnij, że jeśli zbiór  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ , to istnieje zbiór przeliczalny  $T_0 \subset T$  taki, że jeśli  $x, y \in \mathbb{R}^T$  oraz  $x(t) = y(t)$  dla  $t \in T_0$  to  $x \in A \Leftrightarrow y \in A$ .
2. Niech  $T = [a, b]$  oraz  $a < t_0 < b$ . Wykaż, że następujące zbiory nie należą do  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ :
  - i)  $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^T : \sup_{t \in [a, b]} |x_t| \leq 1\}$ ;
  - ii)  $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^T : t \rightarrow x_t \text{ ciągłe na } [a, b]\}$ ;
  - iii)  $A_3 = \{x \in \mathbb{R}^T : \lim_{t \rightarrow t_0} x_t = 0\}$ ;
  - iv)  $A_4 = \{x \in \mathbb{R}^T : t \rightarrow x_t \text{ ciągłe w } t_0\}$ .Wykaż mierzalność tych zbiorów przy założeniu ciągłości (prawostronnej ciągłości) trajektorii, tzn. wykaż, że wszystkie te zbiory po przecięciu z  $C(T)$  ( $RC(T)$  odp.) należą do  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap C(T)$  ( $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap RC(T)$  odp.).
3. Niech  $T = [a, b]$ . Udowodnij, że  $\mathcal{F} = \{A \cap C(T) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)\}$  jest  $\sigma$ -ciałem zbiorów borelowskich (w metryce supremum) na  $C(T)$ .
4. Wykaż, że istnieje proces  $(X_t)_{t \geq 0}$  o przyrostach niezależnych, startujący z 0 taki, że  $X_t - X_s$  ma rozkład Cauchy'ego z parametrem  $t - s$  (proces taki nazywamy procesem Cauchy'ego, bądź procesem 1-stabilnym).

### Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 3

1. Proces  $X$  jest modyfikacją procesu Wienera. Które z następujących własności są spełnione dla procesu  $X$ :
  - a) niezależność przyrostów,
  - b) stacjonarność przyrostów,
  - c) ciągłość trajektorii,
  - d)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = 0$  p.n.
  - e)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = 0$  według prawdopodobieństwa?
2. Rozpatrzmy następujące 3 własności procesów:
  - a) ciągłość trajektorii;
  - b) stochastyczną ciągłość (tzn.  $X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} X_s$  gdy  $t \rightarrow s$ );
  - c) ciągłość wg  $p$ -tego momentu (tzn.  $\mathbb{E}|X_t - X_s|^p \rightarrow 0$  gdy  $t \rightarrow s$ ).
 Jakie implikacje zachodzą między powyższymi własnościami?
3. Wykaż, że trajektorie procesu Wienera nie są lokalnie  $1/2$ -hölderowskie.
4. Scentrowany proces gaussowski nazywamy ułamkowym ruchem Browna, jeśli  $\mathbb{E}|X_t - X_s|^2 = |t - s|^{2H}$  (można wykazać, że taki proces istnieje dla  $0 < H < 1$ ). Udowodnij, że ułamkowy ruch Browna ma ciągłą modyfikację. Co można powiedzieć o hölderowskości jej trajektorii?
5. Załóżmy, że  $T$  jest przedziałem i określmy:

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \quad \mathcal{F}_{t-} := \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right).$$

- a) Wykaż, że filtracja  $\mathcal{F}_{t+}$  jest prawostronnie ciągła, tzn.  $\mathcal{F}_{t++} = \mathcal{F}_{t+}$ .
  - b) Udowodnij, że jeśli  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$  jest filtracją generowaną przez proces  $X$  o lewostronnie ciągłych trajektoriach, to  $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$ .
  - c) Niech  $T = [0, \infty)$ ,  $A \in \mathcal{F}$  oraz  $X_t = (t-1)^+ I_A$ . Znajdź  $\mathcal{F}_t^X$ .
  - d) Dla  $X$  jak w punkcie c) określmy  $\tau := \inf\{t: X_t > 0\}$ . Wykaż, że  $\tau$  nie jest momentem zatrzymania względem  $\mathcal{F}_t^X$  ale jest momentem zatrzymania względem  $\mathcal{F}_{t+}^X$ .
6. Załóżmy, że  $T$  jest przedziałem. Wykaż, że:
    - a) jeśli  $\tau$  jest momentem zatrzymania, to  $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$  dla wszystkich  $t$
    - b) jeśli  $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$  dla wszystkich  $t$ , to  $\tau$  jest momentem zatrzymania względem  $\mathcal{F}_{t+}$ .
  7. Niech  $T = [0, \infty)$ , a  $\tau$  będzie momentem zatrzymania, które ze zmiennych  $\tau + 1, \tau^2, (\tau - 1)_+$  muszą być momentami zatrzymania?
  8. Niech  $T = [0, \infty)$ , a  $(X_t)_{t \in T}$  procesem  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptowalnym, o ciągłych trajektoriach. Wykaż, że dla  $A$  otwartego  $\tau_A := \inf\{t: X_t \in A\}$  jest momentem zatrzymania względem  $\mathcal{F}_{t+}$ .

## Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 4

1. Wykaż, że jeśli proces  $X_t$  ma niezależne przyrosty i prawostronnie ciągłe trajektorie, to dla  $s < t$  zmienna  $X_t - X_s$  jest niezależna od  $\mathcal{F}_{s+}^X$ .
2. Wykaż, że jeśli  $\tau$  i  $\sigma$  są momentami zatrzymania. Wykaż, że zdarzenia  $\{\tau < \sigma\}$ ,  $\{\tau = \sigma\}$  i  $\{\tau \leq \sigma\}$  należą do  $\mathcal{F}_\tau$ ,  $\mathcal{F}_\sigma$  i  $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$ .
3. Wykaż, że jeśli  $\tau$  jest momentem zatrzymania, to proces  $X_t := I_{[0, \tau)}(t)$  jest progresywnie mierzalny.
4. Niech  $\tau$  będzie momentem zatrzymania względem  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , a  $(X_t)$  będzie procesem  $\mathcal{F}_t$ -adaptowanym. Udowodnij, że jeśli  $\tau$  przyjmuje przeliczalnie wiele wartości, to  $X_\tau$  jest  $\mathcal{F}_\tau$  mierzalny na zbiorze  $\tau < \infty$ .
5. Wykaż, że jeśli  $\sigma$  jest momentem zatrzymania,  $\tau \geq \sigma$  oraz  $\tau$  jest  $\mathcal{F}_\sigma$  mierzalny, to  $\tau$  jest momentem zatrzymania.
6. Załóżmy, że  $N_t$  jest procesem Poissona z intensywnością  $\lambda$ , tzn. procesem o prawostronnie ciągłych trajektoriach takim, że  $N_0 = 0$ ,  $N$  ma przyrosty niezależne, oraz  $N_t - N_s \sim \text{Pois}(\lambda(t-s))$  dla  $t > s$ . Wykaż, że  $(N_t - \lambda t)_{t \geq 0}$  oraz  $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t \geq 0}$  są martyngalami względem  $(\mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}$ .
7. Wykaż, że  $(\exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}), \mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$  jest martyngalem dla dowolnego  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
8. Niech  $W_t$  będzie  $n$ -wymiarowym procesem Wienera, a  $f$  funkcją harmoniczną na  $\mathbb{R}^n$  taką, że  $\mathbb{E}|f(W_t)| < \infty$  dla wszystkich  $t$ . Wykaż, że  $(f(W_t), \mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$  jest martyngalem.

## Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 5

1. (Prawo iterowanego logarytmu dla procesu Wienera) Wykaż, że

a)  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1$  p.n.

b)  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1$  p.n.

Wskazówki:

i) Niech  $C > 1$  oraz  $u > C^{1/2}$ . Wykaż, że

$$\sum_n \mathbb{P} \left( \sup_{C^n \leq t \leq C^{n+1}} W_t \geq u \sqrt{2C^n \ln \ln C^n} \right) < \infty$$

i wywnioskuj stąd, że  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \leq u$  p.n.

ii) Wykaż, że  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \leq 1$  p.n. oraz  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \geq -1$  p.n.

iii) Udowodnij, że dla  $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$  i  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} \right) e^{-t^2/2} \leq \mathbb{P}(g \geq t) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t^2/2}.$$

iv) Wykaż, że dla  $C > 1$  i  $u < 1$

$$\sum \mathbb{P}(W_{C^n} - W_{C^{n-1}} \geq u \sqrt{1 - 1/C} \sqrt{2C^n \ln \ln C^n}) = \infty$$

i wywnioskuj stąd i z ii), że  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \geq u(1 - 1/C)^{1/2} - C^{-1/2}$  p.n.

2. Udowodnij, że

a)  $\limsup_{t \rightarrow 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} = 1$  p.n.

b)  $\liminf_{t \rightarrow 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} = -1$  p.n.

## Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 6

1. Które z podanych niżej warunków implikują jednostajną całkowalność ciągu  $X_n$ :
  - a)  $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$ ,
  - b)  $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^2 < \infty$ ,
  - c)  $\mathbb{E} \sup_n |X_n| < \infty$ ,
  - d) całkowalność oraz zbieżność  $X_n$  w  $L_1$ ,
  - e) całkowalność oraz zbieżność  $X_n$  p.n.?
2. Wykaż, że martyngał  $M_t = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$  jest zbieżny p.n. i znajdź jego granicę. Czy jest on zbieżny w  $L_1$ ?
3. Niech  $\tau$  będzie momentem zatrzymania względem  $\mathcal{F}_t^W$ .
  - a) Wykaż, że  $(W_{\tau \wedge n}, \mathcal{F}_{\tau \wedge n})_{n=1}^\infty$  jest martyngałem.
  - b) Udowodnij, że jeśli  $\mathbb{E}\tau < \infty$ , to  $\mathbb{E} \sup_n W_{\tau \wedge n}^2 < \infty$ .
  - c) Wykaż, że jeśli  $\mathbb{E}\tau < \infty$ , to  $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$  i  $\mathbb{E}W_\tau = 0$ .
4. Niech  $W_t$  będzie jednowymiarowym procesem Wienera oraz

$$\tau_a := \inf\{t > 0: W_t = a\}, \quad \tilde{\tau}_a := \inf\{t > 0: |W_t| = a\}.$$

Rozpatrując martyngały  $W_t$  i  $W_t^2 - t$  wykaż, że

- a)  $\tau_a < \infty$  p.n. dla wszystkich  $a \in \mathbb{R}$ ,
  - b)  $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b}{a+b}$  dla  $a, b > 0$ ,
  - c)  $\mathbb{E}\tilde{\tau}_a = a^2$  dla  $a \geq 0$ ,
  - d)  $\mathbb{E}\tau_a \wedge \tau_{-b} = ab$  dla  $a, b > 0$ ,
  - e)  $\mathbb{E}\tau_a = \infty$  dla wszystkich  $a \neq 0$ .
5. Rozpatrując martyngały  $M_t^\lambda := \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$  oraz  $N_t^\lambda := (M_t^\lambda + M_t^{-\lambda})/2$  wykaż, że przy oznaczeniach poprzedniego zadania, dla wszystkich  $a, \lambda \geq 0$ ,
    - a)  $\mathbb{E}e^{-\lambda\tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$ ,
    - b)  $\mathbb{E}e^{-\lambda\tilde{\tau}_a} = (\cosh(a\sqrt{2\lambda}))^{-1}$ .
  6. Załóżmy, że  $h$  jest niemalejącą funkcją ciągłą na przedziale  $[a, b]$ . Udowodnij, że
    - a) Jeśli  $g$  ma wahanie skończone, to  $g \circ h$  też ma wahanie skończone
    - b) Jeśli  $\int_{h(a)}^{h(b)} f dg$  istnieje, to

$$\int_a^b f(h(t)) dg(h(t)) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(s) dg(s).$$

7. Załóżmy, że  $f, g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , przy czym  $f$  i  $g$  są ciągłe, a  $h$  ma wahanie skończone. Udowodnij, że
  - a)  $H(x) = \int_a^x g(t) dh(t)$  ma wahanie skończone na  $[a, b]$ .
  - b)  $\int_a^b f dH = \int_a^b f g dh$ .
8. Wykaż, że dla dowolnej funkcji ciągłej  $f$  o wahanu skończonym na  $[a, b]$  zachodzi  $\int_a^b f(s) df(s) = \frac{1}{2}(f^2(b) - f^2(a))$ .

### Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 7

1. Oblicz następujące granice w  $L_2(\Omega)$  przy  $n \rightarrow \infty$ :
  - a)  $\sum_{k=0}^{n-1} W_{tk/n}(W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$
  - b)  $\sum_{k=0}^{n-1} W_{t(k+1)/n}(W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$ .
2. Oblicz  $\text{Cov}(\int_0^s h_1(t)dW_t, \int_0^s h_2(t)dW_t)$  dla  $h_1, h_2 \in L_2([0, s])$ .
3. Niech  $C_p := (\mathbb{E}|W_1|^p)^{1/p}$ . Wykaż, że dla  $0 < p < \infty$ , przekształcenie  $h \rightarrow C_p^{-1} \int_0^T h(t)dW_t$  jest izometrycznym włożeniem  $L_2([0, T])$  w  $L_p(\Omega)$ .
4. Wykaż, że dla  $0 \leq u < t$  i  $h \in L_2([0, t])$  zachodzi

$$\int_0^u h(s)dW_s = \int_0^t h \mathbb{1}_{[0, u]}(s)dW_s \text{ p.n.}$$

5. Wykaż, że dla  $h \in C^1[0, t]$  zachodzi

$$\int_0^t h(s)dW_s = h(t)W_t - \int_0^t h'(s)W_s ds \text{ p.n.}$$

6. Wykaż, że proces

$$Y_t = \begin{cases} (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

ma takie same rozkłady skończenie wymiarowe co proces  $Z_t = W_t - tW_1$  (most Browna).

### Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 8

1. Wykaż, że jeśli  $X \in \mathcal{L}_T^2$ ,  $0 \leq s \leq t \leq T$  oraz  $\xi$  jest ograniczoną zmienną losową  $\mathcal{F}_s$  mierzalną, to  $\xi X I_{(s,t]} \in \mathcal{L}_T^2$  oraz  $\int_s^t \xi X_u dW_u = \xi \int_s^t X_u dW_u$ . (Uwaga:  $\int_s^t X_u dW_u$  definiujemy jako  $\int_0^t \mathbb{1}_{(s,t]}(u) X_u dW_u$ ).
2. Wykaż, że jeśli  $0 < t_1 < \dots < t_m < T$  oraz  $\xi_k$  są zmiennymi losowymi w  $L^2(\Omega)$ ,  $\mathcal{F}_{t_k}$  mierzalnymi, to proces  $X := \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}$  należy do  $\mathcal{L}_T^2$  oraz

$$\int_0^t X dW = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k (W_{t_{k+1} \wedge t} - W_{t_k \wedge t}).$$

3. Załóżmy, że  $X$  jest procesem prognozowalnym, ciągłym w  $L^2$  (tzn.  $t \rightarrow X_t$  jest ciągła z  $[0, T]$  w  $L^2(\Omega)$ ). Wykaż, że wówczas  $X \in \mathcal{L}_T^2$  oraz dla dowolnego ciągu podziałów  $0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \dots \leq t_{k_n}^{(n)} = T$  o średnicy zbiegającej do zera zachodzi dla  $t \leq T$ ,

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} X_{t_k^{(n)}} (W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}) \rightarrow \int_0^T X dW$$

w  $L^2(\Omega)$  przy  $n \rightarrow \infty$ .

4. Oblicz  $\int_0^t W_s dW_s$ .



### Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 9

1. Niech  $\tau$  będzie momentem zatrzymania takim, że  $\mathbb{E}\tau < \infty$ . Wykaż, że  $\mathbb{1}_{[0,\tau]} \in \mathcal{L}_{\infty}^2$  oraz  $\int_0^{\infty} \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) dW_s = W_{\tau}$ . Wywnioskuj stąd, że  $\mathbb{E}W_{\tau} = 0$  oraz  $\mathbb{E}W_{\tau}^2 = \mathbb{E}\tau$ .
2. Dla  $a, b > 0$  określmy  $\tau := \inf\{t : |W_t| = a\sqrt{b+t}\}$ . Wykaż, że  $\tau < \infty$  p.n. oraz  $\mathbb{E}\tau < \infty$  wtedy i tylko wtedy gdy  $a < 1$ . Ponadto dla  $a < 1$ ,  $\mathbb{E}\tau = \frac{a^2 b}{1-a^2}$ .
3. Niech  $\mathcal{A}$  będzie pewną klasą procesów adaptowalnych na  $[0, T)$  taką, że jeśli  $X \in \mathcal{A}$  to  $X^{\tau} \in \mathcal{A}$  dla dowolnego momentu zatrzymania  $\tau$ . Przez  $\mathcal{A}_{\text{loc}}$  oznaczamy wówczas klasę tych procesów adaptowalnych na  $[0, T)$  dla których istnieje rosnący ciąg momentów zatrzymania  $\tau_n$  taki, że  $\tau_n \rightarrow T$  oraz  $X^{\tau_n} \in \mathcal{A}$  dla wszystkich  $n$ .
  - a) Wykaż, że jeśli  $X \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$  to  $X^{\tau} \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$  dla dowolnego momentu zatrzymania  $\tau$
  - b) Wykaż, że  $(\mathcal{A}_{\text{loc}})_{\text{loc}} = \mathcal{A}_{\text{loc}}$
  - c) Wykaż, że jeśli  $\mathcal{A}$  jest liniowa to  $\mathcal{A}_{\text{loc}}$  też jest liniowa.
4. Wykaż, że  $M - M_0 \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^c$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $M - M_0 \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^{2,c}$ .
5. a) Wykaż, że każdy ograniczony ciągły martyngał lokalny jest martyngałem.  
b) Wykaż, że każdy nieujemny całkowalny ciągły martyngał lokalny jest nadmartyngałem.
6. Niech  $X$  będzie martyngałem lokalnym takim, że  $|X_t| \leq Y$  dla wszystkich  $t$  oraz  $\mathbb{E}Y < \infty$ . Wykaż, że  $X$  jest martyngałem.
7. Niech  $X \in \Lambda_T^2$ ,  $0 \leq s < t < T$  oraz  $\xi$  będzie zmienną losową  $\mathcal{F}_s$  mierzalną (niekoniecznie ograniczoną). Wykaż, że  $\xi X \mathbb{1}_{(s,t]} \in \Lambda_T^2$  oraz

$$\int_s^t \xi X_u dW_u := \int_0^t \xi X_u \mathbb{1}_{(s,t]}(u) dW_u = \xi \int_0^t X_u \mathbb{1}_{(s,t]}(u) dW_u =: \xi \int_t^s X_u dW_u.$$

### Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 10

1. Niech  $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^{2,c}$  oraz  $X \in \Lambda_T^2(M)$ . Wykaż, że dla dowolnego momentu zatrzymania  $\tau$  zachodzi

$$\left( \int X dM \right)^\tau = \int X dM^\tau = \int X \mathbb{1}_{[0,\tau]} dM = \int X \mathbb{1}_{[0,\tau]} dM^\tau.$$

W szczególności jeśli procesy  $X$  i  $Y$  pokrywają się na przedziale  $[0, \tau]$ , to  $(\int X dM)^\tau = (\int Y dM)^\tau$ .

2. Wykaż, że każdy ciągły martyngał lokalny  $M = (M_t)_{t < T}$ , którego trajektorie mają skończone wahanie na każdym przedziale  $[0, t]$  jest stale równy  $M_0$ .
3. Niech  $M = \int W_t^2 dW_t$ . Oblicz  $\mathbb{E}M_s^2$ . Jak wygląda przestrzeń  $\mathcal{L}_T^2(M)$ ? Czy  $W_t^{-1}I_{\{W_t \neq 0\}}$  należy do tej przestrzeni?
4. Niech  $\xi_n$  będzie ciągiem zmiennych losowych, a  $A_k$  wstępującym ciągiem zdarzeń takim, że  $\mathbb{P}(\bigcup_k A_k) = 1$ . Załóżmy, że dla wszystkich  $k$ , zmienne  $\xi_n I_{A_k}$  zbiegają według prawdopodobieństwa przy  $n \rightarrow \infty$  do zmiennej  $\eta_k$ . Wówczas  $\xi_n$  zbiega według rozkładu do zmiennej  $\eta$  takiej, że  $\eta I_{A_k} = \eta_k$  p.n. dla  $k = 1, 2, \dots$
5. Załóżmy, że  $\xi_n$  są całkowalnymi, nieujemnymi zmiennymi losowymi zbieżnymi według prawdopodobieństwa do zmiennej  $\xi$  oraz dla wszystkich  $n$ ,  $\mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\xi$ . Wykaż, że  $\xi_n$  zbiega do  $\xi$  w  $L_1$ .

### Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 11

1. Oblicz  $\langle W^1, W^2 \rangle$ , gdzie  $W^1, W^2$  są niezależnymi procesy Wienera.
2. Udowodnij, że
  - a)  $\langle M, M \rangle = \langle M \rangle = \langle -M \rangle$ ,
  - b)  $\langle M, N \rangle = \langle N, M \rangle$ ,
  - c)  $\langle M - M_0, N \rangle = \langle M, N - N_0 \rangle = \langle M - M_0, N - N_0 \rangle = \langle M, N \rangle$ ,
  - d)  $(N, M) \rightarrow \langle M, N \rangle$  jest przekształceniem dwuliniowym,
  - e)  $\langle M^\tau, N^\tau \rangle = \langle M^\tau, N \rangle = \langle M, N^\tau \rangle = \langle M, N \rangle^\tau$ ,
  - f) Jeśli  $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^{2,c}$ ,  $X, Y \in \Lambda_T^2(M)$  oraz  $N_1 = \int X dM$ ,  $N_2 = \int Y dM$ , to  $\langle N_1, N_2 \rangle = \int XY d\langle M \rangle$ .
  - g) Jeśli  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^{2,c}$ ,  $X \in \Lambda_T^2(M_1) \cap \Lambda_T^2(M_2)$  oraz  $N_i = \int X dM_i$  to  $\langle N_1, N_2 \rangle = \int X^2 d\langle M_1, M_2 \rangle$ .
3. Wykaż, że
  - a)  $|\langle M, N \rangle| \leq \langle M \rangle \langle N \rangle$
  - b)  $\text{Wah}_{[s,t]}(\langle M, N \rangle) \leq \frac{1}{2}[(\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s) + (\langle N \rangle_t - \langle N \rangle_s)]$ .
4. Niech  $M, N \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^c$  oraz  $X \in \Lambda_T^2(M) \cap \Lambda_T^2(N)$ . Uzasadnij, że  $X \in \Lambda_T^2(aM + bN)$  dla  $a, b \in \mathbb{R}$  oraz  $\int X d(aM + bN) = a \int X dM + b \int X dN$ .

## Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 12

1. Określamy

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{3n-1} \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} W_s^4 dW_s \right|^\alpha.$$

- a) Wykaż, że ciąg  $S_n(2)$  jest zbieżny w  $L_1$  i zidentyfikuj jego granicę.  
 b) Co można powiedzieć o zbieżności według prawdopodobieństwa ciągu  $S_n(\alpha)$  dla  $\alpha \neq 2$ ?

2. Wykaż, że dla dowolnego procesu  $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^c$ ,  $X \in \Lambda_2^T(M)$  oraz momentu zatrzymania  $\tau \leq T$ ,

$$\mathbb{E} \sup_{t < \tau} \left( \int_0^t X dM \right)^2 \leq 4 \mathbb{E} \int_0^\tau X_s^2 d\langle M \rangle_s.$$

3. Załóżmy, że  $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^c$ ,  $M_0 = 0$  zaś  $\tau$  jest momentem zatrzymania takim, że  $\mathbb{E}\langle M \rangle_\tau < \infty$ . Wykaż, że  $M^\tau$  jest martyngałem ciągłym całkowalnym z kwadratem.  
 4. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części przedstaw  $\int W_s^2 dW_s$  jako wyrażenie nie zawierające całek stochastycznych.  
 5. Załóżmy, że  $X$  jest procesem ciągłym i adaptowalnym, zaś  $Z$  ciągłym semimartyngałem. Wykaż, że jeśli  $t < T$ ,  $\Pi_n = (t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)})$  jest ciągiem podziałów  $[0, t]$  takim, że  $0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \dots \leq t_{k_n}^{(n)} = t$  oraz  $\text{diam}(\Pi_n) \rightarrow 0$ , to

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} X_{t_k^{(n)}} (Z_{t_{k+1}^{(n)}} - Z_{t_k^{(n)}}) \rightarrow \int_0^t X_s dZ_s \quad \text{według prawdopodobieństwa.}$$

6. Korzystając ze wzoru Itô oblicz  $\langle W_t^2 \rangle$  oraz  $\langle W_t, e^{W_t} \rangle$ .  
 7. Niech  $f$  będzie funkcją klasy  $C^2$  na  $\mathbb{R}^2$ , korzystając z dwuwymiarowego wzoru Itô oblicz  $df(t, W_t)$  oraz  $df(tW_t)$ .  
 8. Znajdź proces  $(A_t)_{t \geq 0}$ , którego trajektorie mają wahanie ograniczone na przedziałach skończonych taki, że  $A_0 = 0$  oraz proces  $X_t = \sin(2W_t - 3t) - A_t$  jest martyngałem lokalnym. Wykaż, że  $X_t$  jest martyngałem oraz  $\mathbb{E}X_t^2 \leq 4t$ .  
 9. Niech  $Z_t = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ . Wykaż, że  $dZ_t = \lambda Z_t dW_t$  tzn.  $Z_t = 1 + \lambda \int_0^t Z_s dW_s$ .

### Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 13

1. Wykaż, że ciąg

$$S_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{k}{n} W_{k/n}^3 (W_{k/n} - W_{(k-1)/n})$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa i znajdź jego granicę.

2. Niech  $M$  będzie ciągłym martyngałem lokalnym. Wykaż, że proces  $N_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t)$  jest ciągłym martyngałem lokalnym oraz nadmartyngałem. Ponadto jeśli  $M$  jest ograniczony, to  $N$  jest martyngałem.
3. Niech  $W_t$  będzie  $d$ -wymiarowym procesem Wienera,  $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  funkcją klasy  $C^2$ ,  $G$  zbiorem otwartym ograniczonym w  $\mathbb{R}^d$  oraz  $x \in G$ . Określmy  $\tau := \inf\{t: W_t + x \notin G\}$ . Korzystając ze wzoru Itô wykaż, że jeśli  $g$  jest harmoniczna w  $G$  to  $g(W_t^\tau + x)$  jest martyngałem. Pokaż, że wystarczy zakładać, iż  $g$  jest  $C^2$  w pewnym otoczeniu domknięcia  $G$ .
4. Wykaż, że dla 3-wymiarowego ruchu Browna  $W_t$  i  $a \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$  proces  $X_t = |W_t - a|^{-1}$  jest martyngałem lokalnym, ale nie jest martyngałem. Ponadto  $X_t$  jest nadmartyngałem oraz zbiega do 0 w  $L^1$  i prawie na pewno.
5. Wykaż, że 2-wymiarowego ruchu Browna  $W_t$  i  $a \in \mathbb{R}^2, a \neq 0$  proces  $X_t = \ln|W_t - a|$  jest martyngałem lokalnym. Wywnioskuj stąd, że z prawdopodobieństwem 1 proces  $W_t$  omija punkt  $a$ , ale trajektoria procesu jest dowolnie bliska punktu  $a$ .
6. Załóżmy, że  $W = (W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)})$  jest trójwymiarowym procesem Wienera oraz

$$X_t := \int_0^t \sin(W_s^{(3)}) dW_s^{(1)} + \int_0^t \cos(W_s^{(3)}) dW_s^{(2)}.$$

Wykaż, że  $X$  jest procesem Wienera.

7. Niech  $W = (W^1, \dots, W^d)$  będzie  $d$ -wymiarowym ruchem Browna, a  $R_t = |W_t|$ . Wykaż, że
- a)  $B_t := \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{W_s^{(j)}}{R_s} dW_s^j$  jest jednowymiarowym procesem Wienera;
- b)  $R_t = \int_0^t \frac{d-1}{2R_s} ds + B_t$  ( $R_t$  jest nazywane procesem Bessela.)

### Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 14

1. i) Wykaż, że dla  $x, \sigma, b \in \mathbb{R}$  istnieje dokładnie jeden proces  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  taki, że

$$X_t = x + \sigma \int_0^t X_s dW_s + b \int_0^t X_s ds.$$

Ponadto  $\sup_{t \leq u} \mathbb{E}X_t^2 < \infty$  dla  $u < \infty$ .

ii) Oblicz  $\mathbb{E}X_t$ .

iii) Znajdź stochastyczne równania różniczkowe spełnione przez procesy  $X^2 + t$  i  $e^X$ .

2. Wykaż, że rozwiązanie równania  $dX = e^{-X} dW - \frac{1}{2} e^{-2X} dt$  eksploduje w skończonym czasie. (Wsk. Rozpatrz proces  $Y = e^X$ ).

3. Wykaż, że dla  $a > 0$  proces  $X_t = \xi e^{bt} + \sqrt{a} \int_0^t e^{b(t-s)} dW_s$  jest jedynym rozwiązaniem równania  $dX_t = bX_t dt + \sqrt{a} dW_t$  z warunkiem początkowym  $X_0 = \xi$ . Jeśli  $b < 0$  oraz  $\xi$  ma rozkład  $\mathcal{N}(0, \frac{a}{2b})$  to  $X_t$  jest procesem stacjonarnym (proces Ornsteina-Uhlenbecka).

4. Załóżmy, że  $\sigma(t)$  jest ograniczoną funkcją ciągłą. Wykaż, że proces

$$X_t = x \exp \left( \int_0^t \sigma(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s)^2 ds \right)$$

jest jedynym rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego

$$dX_t = \sigma(t) X_t dW_t, \quad X_0 = x.$$

5. Niech  $\sigma = (\sigma_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d}$  będzie macierzą procesów z  $\Lambda^2$ . Określamy wówczas  $\int \sigma dW$  jako  $m$  wymiarowy proces  $(\sum_{j=1}^d \sigma_{1j} dW_j, \dots, \sum_{j=1}^d \sigma_{mj} dW_j)$ . Niech  $Z = (Z_1, \dots, Z_m) = \int \sigma dW + \int b dt$ , gdzie  $b = (b_1(t), \dots, b_m(t))$  proces  $m$  wymiarowy ciągły, adaptowalny. Dla  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  klasy  $C^2$  oblicz korzystając z wzoru Itô  $df(Z)$ .

6. Załóżmy, że  $A(t)$  jest ciągłą funkcją na  $[0, \infty)$  o wartościach w macierzach  $m \times m$ ,  $\sigma(t)$  jest ciągłą funkcją na  $[0, \infty)$  o wartościach w macierzach  $m \times d$  zaś  $a(t)$  jest ciągłą funkcją na  $[0, \infty)$  o wartościach w  $\mathbb{R}^m$ . Niech  $S(t)$  będzie jedynym rozwiązaniem równania

$$\frac{dS(t)}{dt} = A(t)S(t); \quad S(0) = I.$$

Ponadto niech  $W$  będzie  $d$ -wymiarowym procesem Wienera, a  $\xi$  zmienną losową niezależną od  $W$ . Wykaż, że

$$a) \quad \xi(t) := S(t) \left( \xi + \int_0^t S^{-1}(s) a(s) ds \right)$$

jest rozwiązaniem równania deterministycznego

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = A(t)\xi(t) + a(t); \quad \xi(0) = \xi,$$

$$b) \quad X(t) = S(t) \left( \xi + \int_0^t S^{-1}(s) a(s) ds + \int_0^t S^{-1}(s) \sigma(s) dW_s \right)$$

jest jedynym rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego

$$dX_t = (A(t)X_t + a(t))dt + \sigma(t)dW_t; \quad X_0 = \xi.$$

### Zadania ze Wstępu do Analizy Stochastycznej 15

1. Znajdź taką miarę probabilistyczną  $\mathbb{Q}$  na  $(\Omega, \mathcal{F}_{\leq 1}^W)$ , by proces  $(W_t + 2t^4)_{0 \leq t \leq 1}$  był procesem Wienera względem  $\mathbb{Q}$ .
2. Niech  $T < \infty$ ,  $U$  będzie procesem Wienera na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,

$$Z_t = \exp \left( \int_0^t b(s, U_s) dU_s - \frac{1}{2} \int_0^t b^2(s, U_s) ds \right), \quad W_t := U_t - \int_0^t b(s, U_s) ds.$$

Stosując twierdzenie Girsanowa wykaż, że jeśli  $\mathbb{E}Z_T = 1$  to istnieje miara probabilistyczna  $\mathbb{Q}_T$  taka, że na przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_T)$  para  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  jest procesem Wienera oraz

$$dU_t = b(t, U_t) dt + dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad U_0 = 0.$$