**Zadania z Procesów Stochastycznych 1**

1. Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Poissona są niemalejące, przyjmują wartości z $\mathbb{Z}_+$, mają wszystkie skoki równe 1 oraz dążą do nieskończoności.

2. Wykaż, że moment pierwszego skoku w procesie Poissona
$$S_1 := \inf\{t : N_t > 0\}$$
jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda$.

3. Niech
$$S_k := \inf\{t : N_t = k\}$$
będzie momentem $k$-tego skoku w procesie Poissona. Wykaż, że odstępy między skokami
$$T_1 = S_1, T_2 = S_2 - S_1, T_3 = S_3 - S_2, \dots$$
są zmiennymi niezależnymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym.

4. Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ p.n.

5. Niech $N_t^{(1)}$ i $N_t^{(2)}$ będą niezależnymi procesami Poissona. Wykaż, że $N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ jest procesem Poissona

6. Udowodnij, że $\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n.

7. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera
a) $X_t = -W_t$ (odbicie)
b) $Y_t = c^{-1/2} W_{ct}, c > 0$ (przeskalowanie czasu)
c) $Z_t = tW_{1/t}$ dla $t > 0$ oraz $Z_0 = 0$ (inwersja czasu)
d) $U_t = W_{T+t} - W_T, T \geqslant 0$
e) $V_t = W_t$ dla $t \leqslant T$, $V_t = 2W_T - W_t$ dla $t > T$, gdzie $T \geqslant 0$.

8. Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$ oraz $\|\pi_n\| = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę $\pi_n$. Udowodnij, że
$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \to b - a, n \to \infty \text{ w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P),$$
jeśli $\|\pi_n\| \to 0$ oraz $S_n \to b - a$ p.n., jeśli $\sum_n \|\pi_n\| < \infty$.

9. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.

10. Znajdź rozkład wektora losowego $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n})$ dla $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

**Zadania z Procesów Stochastycznych 2**

1. Udowodnij, że jeśli zbiór $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ to istnieje zbiór przeliczalny $T_0 \subset T$ taki, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}^T$ oraz $x(t) = y(t)$ dla $t \in T_0$ to $x \in A \Leftrightarrow y \in A$.

2. Niech $T = [a, b]$ $a < t_0 < b$, wykaż, że następujące zbiory nie należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$.
$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^T : sup_{t\in[a,b]}|x_t| \leqslant 1\}$;
$A_2 = \{x \in \mathbb{R}^T : t \to x_t$ ciągłe na [a,b] $\}$;
$A_3 = \{x \in \mathbb{R}^T : \lim_{t\to t_0} x_t = 0\}$:
$A_4 = \{x \in \mathbb{R}^T : t \to x_t$ ciągłe w $t_0\}$.
Wykaż mierzalność tych zbiorów przy założeniu ciągłości (prawostronnej ciągłości) trajektorii tzn. wykaż, że wszystkie te zbiory po przecięciu z $C(T)$ ($RC(T)$ odp.) należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap C(T)$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap RC(T)$ odp.).

3. Wykaż, że dla dowolnej rodziny miar probabilistycznych $\mu_t$ istnieje rodzina niezależnych zmiennych losowych $X_t$ taka, że $X_t \sim \mu_t$.

4. Wykaż, że istnieje proces spełniający warunki (W0)-(W2) definicji procesu Wienera.

5. Wykaż, że istnieje proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ o przyrostach niezależnych, startujący z 0 taki, że $X_t - X_s$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem $t - s$ (proces taki nazywamy procesem Cauchy'ego, bądź procesem 1-stabilnym).

6. Niech $f = \sum_{i=1}^n a_i I_{[t_{i-1},t_i)}$, gdzie $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ będzie funkcją kawałkami stałą. Przyporządkujmy takiej funkcji zmienną $I(f) = \sum_{i=1}^n a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$. Udowodnij, że
a) $I(f)$ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$, gdzie $\sigma_f^2 = \int_0^\infty f^2(x)dx$
b) zmienne $I(f_1), I(f_2)$ dla $f_1, f_2$ postaci jak wyżej mają łączny rozkład gaussowski oraz $\mathrm{Cov}(I(f_1), I(f_2)) = \int_0^\infty f(x)g(x)dx$
c) Przekształcenie $I$ rozszerza się do izometrii z $L^2([0,\infty))$ w $L^2(\Omega)$ i własności a) b) zachodzą dla $f, f_1, f_2 \in L^2([0,\infty))$
d) Przekształcenie $I$ z punktu c) po przeskalowaniu przez odpowiednią stałą jest izometrycznym włożeniem $L^2([0,\infty))$ w $L^p(\Omega)$ dla dowolnego $1 \leqslant p < \infty$.
Tak zdefiniowane $I(f)$ nazywa się całką Wienera-Paleya i się często oznacza $I(f) = \int_0^\infty f(s)dW_s$.

**Zadania z Procesów Stochastycznych 3**

1. Rozpatrzmy następujące 3 własności procesów
a) ciągłość trajektorii
b) stochastyczną ciągłość (tzn. $X_t \xrightarrow{\mathbf{P}} X_s$ gdy $t \to s$)
c) ciągłość wg $p$-tego momentu (tzn. $\mathbf{E}|X_t - X_s|^p \to 0$ gdy $t \to s$).
Jakie implikacje zachodzą między powyższymi własnościami?

2. Udowodnij, że jeśli proces spełnia warunki (W0)-(W2) to ma modyfikację o ciągłych trajektoriach.

3. Wykaż, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera są lokalnie hölderowskie z dowolnym wykładnikiem $\gamma < 1/2$.

4. Wykaż, że trajektorie procesu Wienera nie są lokalnie 1/2-hölderowskie

5. Wykaż, że trajektorie procesu Wienera z prawdopodobieństwem 1 nie są jednostajnie ciągłe na $[0, \infty)$

6. Scentrowany proces gaussowski nazywamy ułamkowym ruchem Browna, jeśli $E|X_t - X_s|^2 = |t-s|^{2\alpha}$ (taki proces istnieje dla $0 < \alpha < 1$). Udowodnij, że ułamkowy ruch Browna ma ciągłą modyfikację. Co można powiedzieć o hölderowskości jej trajektorii?

7. Pokaż, że jeśli $X_\lambda \sim \mathrm{Poiss}(\lambda)$ i $\lambda \leqslant 1$ to dla dowolnego $p > 0$, $\mathbf{E}|X_\lambda|^p \leqslant C_p\lambda$, gdzie $C_p = \mathbf{E}|X_1|^p < \infty$. Wywnioskuj stąd, że w Twierdzeniu o ciągłej modyfikacji założenie $\beta > 0$ jest istotne.

**Zadania z Procesów Stochastycznych 4**

1. Policz funkcję kowariancji mostu Browna $W_t - tW_1$.

2. Wykaż za pomocą funkcji kowariancji, że procesy z zadania 7 z 1 serii są procesami Wienera.

3. Wykaż, że proces Ornsteina-Uhlebecka $G_t = e^{-t}W_{e^{2t}}$ jest procesem stacjonarnym.

4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie z dystrybuantą $F$. Niech

$$Y_t^{(n)} = \frac{\#\{i \colon X_i \leqslant t\}}{n} - F(t),\ n = 1, 2, \ldots.$$

Wykaż, że skończenie wymiarowe rozkłady procesów $\sqrt{n}Y^{(n)}$ zbiegają przy $n \to \infty$ do rozkładu pewnego procesu gaussowskiego $Z$, wyznacz funkcję wartości średniej i kowariancję $Z$.

5. Niech $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ będzie procesem o niezależnych przyrostach, zaś $\mathcal{F}_t$ filtracją generowaną przez $X$. Wykaż, że dla $t > s$ zmienna $X_t - X_s$ jest niezależna od sigma ciała $\mathcal{F}_t$, a jeśli $X$ ma prawostronnie ciągłe trajektorie to również od $\mathcal{F}_{t+}$.

**Zadania z Procesów Stochastycznych 5**

W poniższych zadaniach przyjmujemy, że $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest ustaloną filtracją, zaś $\tau$ zmienną losową o wartościach w $T \cup \{\infty\}$.

1. Dla $T = \{1, 2, \ldots\}$ wykaż, że $\tau$ jest momentem zatrzymania wtedy i tylko wtedy gdy $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ dla $n \in T$.

2. Niech $T = \{1, 2, \ldots\}$, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ będą borelowskimi podzbiorami $\mathbb{R}$, a $X_n$ ciągiem $\mathcal{F}_n$-adaptowalnym. Określamy indukcyjnie dla $i = 2, 3, \ldots$
$$\tau_1 := \inf\{n\colon X_n \in \Gamma_1\} \text{ oraz } \tau_i := \inf\{n > \tau_{i-1}\colon X_n \in \Gamma_i\}.$$
Wykaż, że $\tau_i$ są momentami zatrzymania.

3. Załóżmy, że $T$ jest przedziałem i określmy
$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \ \mathcal{F}_{t-} := \sigma(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s).$$
a) Wykaż, że filtracja $\mathcal{F}_{t+}$ jest prawostronnie ciągła tzn $\mathcal{F}_{t++} = \mathcal{F}_{t+}$.
b) Udowodnij, że jeśli $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$ jest filtracją generowaną przez proces $X$ o lewostronnie ciągłych trajektoriach to $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$.
c) Niech $T = [0, \infty)$, $A \in \mathcal{F}$ oraz $X_t = (t-1)^+ I_A$. Znajdź $\mathcal{F}_t^X$.
d) Dla $X$ jak w punkcie c) określmy $\tau := \inf\{t\colon X_t > 0\}$. Wykaż, że $\tau$ nie jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t^X$ ale jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}^X$.

4. Załóżmy, że $T$ jest przedziałem, wykaż, że
a) jeśli $\tau$ jest momentem zatrzymania to $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t$
b) jeśli $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t$ to $\tau$ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}$.

5. Niech $T = [0, \infty)$, a $\tau$ będzie momentem zatrzymania, które ze zmiennych $\tau + 1, \tau^2, \tau - 1$ muszą być momentami zatrzymania?

6. Niech $T = [0, \infty)$, a $X_t$ procesem $\mathcal{F}_t$-adaptowalnym o ciągłych trajektoriach. Wykaż, że dla $A$ otwartego $\tau_A := \inf\{t\colon X_t \in A\}$ jest momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_{t+}$.

7. Wykaż, że jeśli $\tau$ i $\sigma$ są momentami zatrzymania to zdarzenia $\{\tau < \sigma\}, \{\tau = \sigma\}$ i $\{\tau \leqslant \sigma\}$ należą do $\mathcal{F}_\tau$, $\mathcal{F}_\sigma$ i $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.

8. Wykaż, że jeśli $\tau$ jest momentem zatrzymania to proces $X_t := I_{[0,\tau)}(t)$ jest progresywnie mierzalny.

9. Wykaż, że jeśli $\sigma$ jest momentem zatrzymania, $\tau \geqslant \sigma$ oraz $\tau$ jest $\mathcal{F}_\sigma$ mierzalny to $\tau$ jest momentem zatrzymania.

**Zadania z Procesów Stochastycznych 6**

1. Sprawdź, że następujące rodziny są martyngałami
   a) $(N_t - \lambda t, \mathcal{F}_t^N)_{t\geqslant 0}$
   b) $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t, \mathcal{F}_t^N)_{t\geqslant 0}$
   c) $(\exp(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}), \mathcal{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$.

2. Wykaż, że dla $x > 0$

$$\frac{1}{10(x+1)}e^{-x^2/2} \leqslant \mathbf{P}(W_1 \geqslant x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2}.$$

3. Wykaż, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{|W_t|}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1$ p.n. (prawo iterowanego logarytmu dla procesu Wienera).
   Wskazówki
   a) Wykorzystując nierówność z wykładu

$$\forall_{u,s>0}\ \mathbf{P}(\sup_{0\leqslant t\leqslant s} |W_s| \geqslant u) \leqslant e^{-\frac{u^2}{2s}}$$

   wykaż, że dla $\varepsilon > 0$ znajdziemy $\alpha > 1$ takie, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\sup_{\alpha^n\leqslant t\leqslant\alpha^{n+1}} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geqslant 1+\varepsilon) < \infty)$$

   i wywnioskuj stąd, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{|W_t|}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \leqslant 1$ p.n..
   b) Wykorzystując zadanie 2 udowodnij, że dla $\varepsilon > 0$ znajdziemy $C > 1$ takie, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(W_{C^{n+1}} - W_{C^n} \geqslant (1-\varepsilon)(\sqrt{2C^{n+1}\ln\ln C^{n+1}} + \sqrt{2C^n \ln\ln C^n})) = \infty$$

   wywnioskuj stąd, że

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{W_{C^{n+1}} - W_{C^n}}{\sqrt{2C^{n+1}\ln\ln C^{n+1}} + \sqrt{2C^n\ln\ln C^n}} \geqslant 1-\varepsilon \text{ p.n.},$$

   a następnie, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{|W_t|}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \geqslant 1$.

4. Nieznacznie modyfikując powyższe rozumowanie wykaż, że $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1$ p.n., a $\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1$ p.n..

5. Wykaż, że $\limsup_{t\to 0+} \frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln(1/t)}} = 1$ p.n..

**Zadania z Procesów Stochastycznych 7**

1. Niech $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$ będzie $d$ wymiarowym procesem Wienera, a $x_0 \in \mathbb{R}^d$
   a) Wykaż, że $|W_t - x_0|^{2-d}$ jest nieujemnym podmartyngałem
   b) Udowodnij, że $|W_t - x_0|^{2-d}$ zbiega przy $t \to \infty$ do 0 według prawdopodobieństwa i p.n. i wywnioskuj stąd, że $\lim_{t\to\infty} |W_t| = \infty$ p.n.
   c) Wykaż, że dla prawostronnie ciągłego martyngału $(X_t)_{t\geqslant a}$ zachodzi
   $$\forall_{\lambda>0}\ \lambda \mathbf{P}(\sup_{t\geqslant a} X_t \geqslant \lambda) \leqslant \sup_t \mathbf{E}X_t^- + \mathbf{E}X_a$$
   d) Wykaż, że $\mathbf{P}(\exists_{t>0} W_t = x_0) = 0$.

2. Niech $W_t$ będzie jednowymiarowym procesem Wienera oraz
   $$\tau_a := \inf\{t > 0 \colon W_t = a\},\ \tilde{\tau}_a := \inf\{t > 0 \colon |W_t| = a\}.$$
   Rozpatrując martyngały $W_t$ i $W_t^2 - t$ wykaż, że
   a) $\tau_a < \infty$ p.n. dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$
   b) $\mathbf{P}(\tau_a < \tau_{-b}) = \frac{b}{a+b}$ dla $a, b > 0$.
   c) $\mathbf{E}\tilde{\tau}_a = a^2$ dla $a \geqslant 0$.
   d) $\mathbf{E}\tau_a \wedge \tau_{-b} = ab$ dla $a, b > 0$.
   e) $\mathbf{E}\tau_a = \infty$ dla wszystkich $a \neq 0$

3. Rozpatrując martyngały $M_t^\lambda = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$ oraz $N_t^\lambda = (M_t^\lambda + M_t^{-\lambda})/2$ wykaż, że przy oznaczeniach poprzedniego lematu zachodzi dla wszystkich $a, \lambda \geqslant 0$
   a) $\mathbf{E}e^{-\lambda\tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$
   b) $\mathbf{E}e^{-\lambda\tilde{\tau}_a} = (\cosh(a\sqrt{2\lambda}))^{-1}$.

4. Wykaż, że martyngał $M_t^\lambda$ z poprzedniego zadania jest zbieżny p.n. i znajdź jego granicę. Czy jest on zbieżny w $L^1$?

5. Niech $\tau$ będzie momentem zatrzymania względem $\mathcal{F}_t^W$.
   a) Wykaż, że $(W_{\tau\wedge n}, \mathcal{F}_{\tau\wedge n})_{n=1}^\infty$ jest martyngałem.
   b) Udowodnij, że jeśli $\mathbf{E}\tau < \infty$ to $\mathbf{E}\sup_n W_{\tau\wedge n}^2 < \infty$.
   c) Wykaż, że jeśli $\mathbf{E}\tau < \infty$ to $\mathbf{E}W_\tau^2 = \mathbf{E}\tau$ i $\mathbf{E}W_\tau = 0$

**Zadania z Procesów Stochastycznych 8**

1. Załóżmy, że przestrzeń stanów $E$ jest przeliczalna. Wykaż, że wówczas
a) $(X_t)_{t\in T}$ jest procesem Markowa wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ i $k_1, \ldots, k_n \in E$ takich, że $\mathbf{P}(X_{t_1} = k_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = k_{n-1}) \neq 0$
$$\mathbf{P}(X_{t_n} = k_n | X_{t_1} = k_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = k_{n-1}) = \mathbf{P}(X_{t_n} = k_n | X_{t_{n-1}} = k_{n-1}).$$
b) $(X_t)_{t\in T}$ jest procesem Markowa z macierzą przejścia $P^{s,t}$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ i $k_1, \ldots, k_n \in E$
$$\mathbf{P}(X_{t_1} = k_1, \ldots, X_{t_n} = k_n) = \mathbf{P}(X_{t_1} = k_1) p_{t_1,t_2}(k_1, k_2) \cdots p_{t_{n-1},t_n}(k_{n-1}, k_n).$$

2. Wykaż, że proces Poissona $N_t$ jest procesem Markowa i znajdź macierz przejścia.

3. Wykaż, że proces $(-1)^{N_t}$ jest procesem Markowa i znajdź macierz przejścia.

4. Niech $X, Y$ będą zmiennymi losowymi, zaś $\mathcal{G}$-$\sigma$ ciałem takim, że $X$ jest $\mathcal{G}$-mierzalne, zaś $Y$ jest niezależne od $\mathcal{G}$. Wykaż, że dla dowolnej funkcji $f(x, y)$ mierzalnej i ograniczonej $\mathbf{E}(f(X, Y)|\mathcal{G}) = \varphi(X)$ gdzie $\varphi(x) = \mathbf{E}f(x, Y)$.

5. Korzystając z poprzedniego zadania udowodnij, że jeśli $X = (X_t)$ jest procesem o przyrostach niezależnych to $X$ jest procesem Markowa z funkcją przejścia $P_{s,t}(x, \Gamma) = \mathbf{P}(X_t - X_s \in \Gamma - x)$.

6. Z zadania 2 wynika w szczególności, że proces Wienera jest procesem Markowa czyli również i proces $(W_{-t})_{t\leqslant 0}$. Znajdź funkcję przejścia dla tego procesu.

7. Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są zmiennymi o jednakowym rozkładzie $\mu$, $S_k = \sum_{n=1}^{k} X_k$, $M_k = \max(X_1, \ldots, X_k)$. Czy następujące procesy muszą być procesami Markowa, jeśli tak to znaleźć odpowiednie funkcje przejścia
a) $X_1, X_2, \ldots$
b) $S_0, S_1, S_2, \ldots$
c) $S_0^+, S_1^+, S_2^+, \ldots$
d) $M_1, M_2, M_3, \ldots$
e) $S_0, S_0 \vee S_1, S_0 \vee S_1 \vee S_2, \ldots$
f) $(S_n, M_n)_{n=1}^{\infty}$.

8. Czy procesy $(|W_t|)$, $(tW_{t^2})$ są procesami Markowa? Jeśli tak to znajdź funkcje przejścia.

**Zadania z Procesów Stochastycznych 9**

1. Załóżmy, że przestrzeń stanów $E = \{1, 2\}$. Sprawdź równania Chapmana-Kołmogorowa dla macierzy
$$P^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 + 2e^{-4t} & 2 - 2e^{-4t} \\ 3 - 3e^{-4t} & 2 + 3e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

2. Załóżmy, że dla $s < t$, $P_{s,t}(x, \cdot)$ jest rozkładem normalnym o średniej $m_{s,t}x$ i wariancji $\sigma^2_{s,t}$. Jakie warunki muszą spełniać $m_{s,t}$ i $\sigma^2_{s,t}$ by istniała rodzina Markowa o funkcji przejścia $P_{s,t}$?

3. Procesy $X_t$ i $Y_t$ są procesami Markowa, czy z tego wynika, że proces $(X_t, Y_t)$ też jest procesem Markowa?

4. Sprawdź, że procesy Wienera i Poissona są procesami fellerowskimi.

5. Wykaż, że proces Wienera ma mocną własność Markowa względem filtracji $\mathcal{F}^W_{\leqslant t}$.

6. Niech $W_t$ będzie procesem Wienera startującym z 0 oraz dla $a \neq 0$
$$\tau_a := \inf\{t \colon W_t = a\}.$$
Wykaż, że
a) $\mathbf{P}(\tau_a \leqslant u, W_u \in \Gamma) = \mathbf{P}(\tau_a \leqslant u, W_u \in 2a - \Gamma)$;
b) $\mathbf{P}(\tau_a \leqslant u) = 2\mathbf{P}(W_u \geqslant a)$ dla $a > 0$.
c) $\tau_a \sim a^2\tau_1$;
d) $\tau_{a+b} \sim \tau_a + \tilde{\tau}_b$ dla $a, b > 0$, gdzie $\tilde{\tau}_b$ jest niezależną kopią $\tau_b$;
e) $s\tau_1 + t\tilde{\tau}_1 \sim (\sqrt{s} + \sqrt{t})^2\tau_1$ dla $s, t > 0$.
f) Znajdź rozkład zmiennej $\sup_{0 \leqslant t \leqslant u} W_t$.

7. Wykaż, że jeśli $\tau$ jest momentem zatrzymania względem filtracji $\mathcal{F}^W_{\leqslant t}$, to proces $(W_{t+\tau} - W_\tau)_{t \geqslant 0}$ jest procesem Wienera niezależnym od $\mathcal{F}_\tau$.

**Zadania z Procesów Stochastycznych 9**

1. Załóżmy, że $X_t$ jest rodziną Markowa na dwuelementowej przestrzeni stanów z macierzą przejścia
$$P^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3+2e^{-7t} & 2-2e^{-7t} \\ 3-3e^{-7t} & 2+3e^{-47t} \end{pmatrix}.$$
a) Znajdź generator $A$ półgrupy generowanej przez $X_t$
b) Znajdź rozkład stacjonarny $\mu$ dla $P^t$
c) Sprawdź, że $\mu A = 0$ i uzasadnij, że to równanie jest spełnione w ogólnym przypadku.

2. Wykaż, że jeśli $f \in C_0(\mathbb{R})$, a $P^t$ jest półgrupą generowaną przez proces Wienera to $t \to P^t f$ jest ciągła.

3. Niech $A$ będzie generatorem półgrupy związanej z procesem Wienera. Wykaż, że jeśli $f \in C_u^{(2)}(\mathbb{R})$ to $f \in D_A$ oraz $Af = \frac{1}{2}f''$.

4. Udowodnij, że dla $d$ wymiarowego procesu Wienera $C_u^{(2)}(\mathbb{R}^d) \subset D_A$ i $Af = \frac{1}{2}\Delta f$ dla $f \in C_u^{(2)}(\mathbb{R}^d)$.

5. Niech $X_t = e^{-t}W_{e^{2t}}$. Wykaż, że $X$ jest jednorodnym procesem Markowa i znajdź $Af$ dla odpowiednio gładkiej funkcji $f$.