Zadania z Procesów Stochastycznych II - 1

1. Niech $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}\}$, gdzie $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} = b$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a,b]$ oraz $\mathrm{diam}(\pi_n) = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ oznacza średnicę π_n. Udowodnij, że

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}|^2 \to b-a, n \to \infty \text{ w } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

jeśli $\mathrm{diam}(\pi_n) \to 0$ oraz $S_n \to b-a$ p.n., jeśli $\sum_n \mathrm{diam}(\pi_n) < \infty$.

2. Jeśli funkcja f jest ciągła na $[a,b]$ i ma wahanie ograniczone to

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} |f(t_k^{(n)}) - f(t_{k-1}^{(n)})|^{1+\delta} = 0$$

jeśli $\delta > 0$ oraz $\mathrm{diam}(\pi_n) \to 0$.

3. Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.

4. * Wykaż, że jeśli M jest ciągłym martyngałem na $[0,T]$ takim, że $M_0 = 0$ p.n. to trajektorie M mają p.n. wahanie skończone na $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy gdy $M \equiv 0$. (Wskazówka: rozpatrzeć najpierw przypadek gdy $\sup_t |M_t| \leqslant C$ oraz $\mathrm{Wah}_{[0,T]}(M) \leqslant C$ p.n. korzystając z tożsamości

$$M_t^2 = \sum_{k=1}^{n} |M_{kt/n} - M_{(k-1)t/n}|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} M_{(k-1)t/n}(M_{(kt/n} - M_{(k-1)t/n}).)$$

5. Wykaż, że jeśli f ma wahanie skończone na $[a,b]$ to $f(t) = f(a) + g_1(t) - g_2(t)$, gdzie g_1 i g_2 są funkcjami niemalejącymi takimi, że $g_i(a) = 0$.

6. Niech π_n będzie ciągiem podziałów jak w zadaniu 1 takim, że $\mathrm{diam}(\pi_n) \to 0$. Wykaż, że jeśli dla dowolnej funkcji $g \in C[a,b]$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} g(t_k^{(n)})(f(t_k^{(n)}) - f(t_{k-1}^{(n)}))$$

i jest skończona to f ma wahanie ograniczone na $[a,b]$.

7. Wykaż, że dla $h \in C^1[0,T]$, $T < \infty$ zachodzi

$$\int_0^T h(t)dW_t = h(T)W_T - \int_0^T h^{'}(t)W_t dt \text{p.n.}$$

8. Jaki rozkład ma zmienna $\int_0^T h(t)dW_t$ dla $h \in L^2[0,T]$?

9. Oblicz $\mathrm{Cov}(\int_0^T h_1(t)dW_t, \int_0^T h_2(t)dW_t)$ dla $h_1, h_2 \in L^2[0,T]$.

10. Wykaż, że proces

$$Y_t = \begin{cases} (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}dW_s & 0 \leqslant t < 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

ma takie same rozkłady skończenie wymiarowe co proces $Z_t = W_t - tW_1$ (most Browna)

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 2

1. Wykaż, że jeśli $X \in \mathcal{L}^2_T, 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T$ oraz ξ jest zmienną losową $\mathcal{F}_t$ mierzalną to $\xi X I_{(t,s]} \in \mathcal{L}^2_T$ oraz $\int_t^s \xi X dW = \xi \int_t^s X dW$ (Uwaga: $\int_t^s X dW$ definiujemy jako $\int_0^T I_{(s,t]} X dW$).

2. Wykaż, że jeśli $0 < t_1 < \ldots < t_m < T$ oraz ξ_k są zmiennymi losowymi w $L^2(\Omega)$, $\mathcal{F}_{t_k}$ mierzalnymi to proces $X := \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k I_{(t_k, t_{k+1}]}$ należy do $\mathcal{L}^2_T$ oraz $\int_0^t X dW = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k (W_{t_{k+1} \wedge t} - W_{t_k \wedge t})$.

3. Załóżmy, że X jest procesem prognozowalnym, ciągłym w L^2 (tzn. $t \to X_t$ jest ciągła z $[0,T]$ w $L^2(\Omega)$). Wykaż, że wówczas $X \in \mathcal{L}^2_T$ oraz dla dowolnego ciągu podziałów $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{k_n}^{(n)} = T$ o średnicy zbiegającej do zera zachodzi dla $t \leqslant T$
$$\sum_{k=0}^{k_n - 1} X_{t_k^{(n)}} (W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}) \to \int_0^T X dW$$
w $L^2(\Omega)$ przy $n \to \infty$.

4. Oblicz granice w $L^2(\Omega)$ przy $n \to \infty$
a) $\sum_{k=0}^{n-1} W_{tk/n} (W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$
b) $\sum_{k=0}^{n-1} W_{t(k+1)/n} (W_{t(k+1)/n} - W_{tk/n})$.
c) Ile wynosi $\int_0^t W_s dW_s$?

5. Wykaż, że dla dowolnej funkcji ciągłej f o wahaniu skończonym na $[a,b]$ zachodzi $\int_a^b f(s) ds = \frac{1}{2}(f^2(b) - f^2(a))$.

6. Niech τ będzie momentem zatrzymania takim, że $\mathbf{E}\tau < \infty$. Wykaż, że $I_{[0,\tau]} \in \mathcal{L}^2_\infty$ oraz $\int_0^\infty I_{[0,\tau]}(s) dW_s = W_\tau$. Wywnioskuj stąd, że $\mathbf{E} W_\tau = 0$ oraz $\mathbf{E} W_\tau^2 = \mathbf{E}\tau$.

7. Dla $a, b > 0$ określmy $\tau := \inf\{t : |W_t| = a\sqrt{b+t}\}$. Wykaż, że $\tau < \infty$ p.n. oraz $\mathbf{E}\tau < \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $a < 1$. Ponadto dla $a < 1$, $\mathbf{E}\tau = \frac{a^2 b}{1-a^2}$.

8. Niech ξ będzie zmienną losową o skończonej wariancji taką, że $\mathbf{E}\xi = 0$. Wykaż, że istnieje moment zatrzymania τ taki, że W_τ ma ten sam rozkład co ξ oraz $\mathbf{E}\tau = \mathbf{E}\xi^2$.

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 3

1. Wykaż, że jeśli M jest martyngałem prawostronnie ciągłym to M^τ też jest martyngałem (względem tej samej filtracji).

2. Niech $(X_n)_{n=0}^\infty$ będzie ciągiem zmiennych $\mathcal{F}_n$ adaptowalnych. Wykaż, że istnieje dokładnie jeden rozkład $X_n = Y_n + Z_n$ taki, że $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem, zaś $Z_0 = 0$ oraz Z_n jest ciągiem prognozowalnym (tzn. $\mathcal{F}_{n-1}$ adaptowalnym). Ponadto X_n jest podmartyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg Y_n jest niemalejący.

3. Niech $X \in \Lambda_T^2$, $0 \leqslant t < s \leqslant T$ oraz ξ będzie zmienną losową $\mathcal{F}_{t_1}$ mierzalną (niekoniecznie ograniczoną). Wykaż, że $\xi X I_{(t,s]} \in \Lambda_T^2$ oraz $\int_t^s \xi X dW = \xi \int_t^s X dW$.

4. Wykaż, że $\langle M^\tau \rangle = \langle M \rangle^\tau$ dla $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{2,c}$ i dowolnego momentu zatrzymania τ.

5. Wykaż, że $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{c} = \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{2,c}$.

6. a) Wykaż, że każdy ograniczony ciągły martyngał lokalny jest martyngałem.
b) Wykaż, że każdy nieujemny całkowalny ciągły martyngał lokalny jest nadmartyngałem.
c) Podaj przykład nieujemnego całkowalnego ciągłego martyngału lokalnego, który nie jest martyngałem.

7. Niech $M, N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{2,c}$ oraz $X \in \Lambda_T^2(M) \cap \Lambda_T^2(N)$. Udowodnij, że $X \in \Lambda_T^2(M+N)$ oraz $\int X d(M+N) = \int X dM + \int X dN$.

8. Niech $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{2,c}$ oraz $X \in \Lambda_T^2(M)$. Wykaż, że dla dowolnego momentu zatrzymania τ zachodzi
$$(\int X dM)^\tau = \int X dM^\tau = \int X I_{[0,\tau]} dM = \int X I_{[0,\tau]} dM^\tau.$$

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 4

1. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części przedstaw $\int W_s^2 dW_s$ jako wyrażenie nie zawierające całek stochastycznych.

2. Oblicz $\langle W^1, W^2 \rangle$, gdzie W^1, W^2 niezależne procesy Wienera.

3. Niech h będzie dowolną funkcją o wahaniu ograniczonym na przedziale $[a,b]$, zaś f, g funkcjami ciągłymi na $[a,b]$. Określmy $G(s) = \int_a^s g(t)dh(t)$ dla $a \leqslant t \leqslant b$. Wykaż, że G ma wahanie ograniczone oraz $\int_a^b f(s)dG(s) = \int_a^b f(s)g(s)dh(s)$.

4. Niech X będzie martyngałem lokalnym takim, że $|X_t| \leqslant Y$ dla wszystkich t oraz $\mathbf{E}Y < \infty$. Wykaż, że X jest martyngałem.

5. Niech $Z_t = \exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2)$. Wykaż, że $dZ_t = \lambda Z_t dW_t$ tzn. $Z_t = 1 + \lambda \int_0^t Z_s dW_s$.

6. Niech f będzie funkcją klasy C^2 na $\mathbb{R}^2$, korzystając z wzoru Ito oblicz $df(t, W_t)$.

7. Niech $\sigma = (\sigma_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant d}$ będzie macierzą procesów z Λ^2. Określamy wówczas $\int \sigma dW$ jako m wymiarowy proces $(\sum_{j=1}^d \sigma_{1j} dW_j, \ldots, \sum_{j=1}^d \sigma_{mj} dW_j)$. Niech $Z = (Z_1, \ldots, Z_m) = \int \sigma dW + \int b dt$, gdzie $b = (b_1(t), \ldots, b_m(t))$ proces m wymiarowy ciągły, adaptowalny. Dla $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ klasy C^2 oblicz korzystając z wzoru Ito $df(Z)$.

8. Niech $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2, G zbiorem otwartym ograniczonym w $\mathbb{R}^d$ oraz $x \in G$. Określmy $\tau := \inf\{t\colon W_t + x \notin G\}$. Korzystając ze wzoru Ito wykaż, że jeśli g jest harmoniczna w G to $h(W_t^\tau + x)$ jest martyngałem. Pokaż, że wystarczy zakładać, iż g jest C^2 w pewnym otoczeniu domknięcia G.

9. Wykaż, że dla 3-wymiarowego ruchu Browna W_t i $a \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$ proces $X_t = |W_t - a|^{-1}$ jest martyngałem lokalnym, ale nie jest martyngałem. Ponadto X_t jest nadmartyngałem oraz zbiega do 0 w L^1 i prawie na pewno.

10. Wykaż, że 2-wymiarowego ruchu Browna W_t i $a \in \mathbb{R}^2, a \neq 0$ proces $X_t = \ln |W_t - a|$ jest martyngałem lokalnym. Wywnioskuj stąd, że z prawdopodobieństwem 1 proces W_t omija punkt a, ale trajektoria procesu jest dowolnie bliska punktu a.

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 5

1. Wykaż, że d-wymiarowy proces X startujący z zera o trajektoriach ciągłych jest procesem Wienera względem filtracji $\mathcal{F}_s$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $u \in \mathbb{R}^d$ oraz $s < t$ zachodzi $\mathbf{E}(\exp(i\langle u, X_t - X_s\rangle)|\mathcal{F}_s) = \exp(-(t-s)\|u\|^2/2)$ p.n..

2. Załóżmy, że $M_1, M_2, \ldots, M_d$ są ciągłymi martyngałami lokalnymi startującymi z zera takimi, że $\langle M_j, M_k\rangle = \delta_{j,k}t$. Wykaż, że $M = (M_1, M_2, \ldots, M_d)$ jest d-wymiarowym procesem Wienera.

3. Wykaż, że d-wymiarowy proces X startujący z zera o trajektoriach ciągłych jest procesem Wienera wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}^d$ proces $\exp(\langle \lambda, X_t\rangle - \|\lambda\|^2 t/2)$ jest martyngałem lokalnym.

4. Niech $T < \infty$ oraz $X = (X_t)_{0\leqslant t<T}$ będzie procesem prognozowalnym takim, że dla pewnej liczby całkowitej $m \geqslant 1$ zachodzi
$$\mathbf{E}\int_0^T X^{2m}(s)ds < \infty.$$
Wykaż, że $X \in \mathcal{L}_T^2$ oraz $M = \int XdW$ jest martyngałem takim, że
$$\mathbf{E}M_T^{2m} \leqslant (m(2m-1))^m T^{m-1}\mathbf{E}\int_0^T X_s^{2m}ds$$
(Wsk. Wzór Ito i nierówność Höldera)

5. Niech $W = (W^1, \ldots, W^d)$ będzie d-wymiarowym ruchem Browna, a $R_t = \|W_t\|$. Wykaż, że
a) $B_t := \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{R_s} dW_s^i$ jest jednowymiarowym procesem Wienera;
b) $R_t = \int_0^t \frac{d-1}{2R_s}ds + B_t$ (R_t jest nazywane procesem Bessela.)

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 6

1. Załóżmy, że $A(t)$ jest ciągłą funkcją na $[0,T]$ o wartościach w macierzach $m\times m$, $\sigma(t)$ jest ciągłą funkcją na $[0,T]$ o wartościach w macierzach $m\times d$ zaś $a(t)$ jest ciągłą funkcją na $[0,T]$ o wartościach w $\mathbb{R}^m$. Niech $S(t)$ będzie jedynym rozwiązaniem równania

$$\frac{dS(t)}{dt} = A(t)S(t); \quad S(0) = I.$$

Ponadto niech W będzie d-wymiarowym procesem Wienera, a ξ zmienną losową niezależną od W. Wykaż, że

$$a)\ \xi(t) := S(t)(\xi + \int_0^t S^{-1}(s)a(s)ds)$$

jest rozwiązaniem równania deterministycznego

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = A(t)\xi(t) + a(t); \quad \xi(0) = \xi,$$

$$b)\ X(t) = S(t)(\xi + \int_0^t S^{-1}(s)a(s)ds + \int_0^t S^{-1}(s)\sigma(s)dW_s)$$

jest jedynym rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego

$$dX_t = (A(t)X_t + a(t))dt + \sigma(t)dW_t; \quad X_0 = \xi.$$

2. Niech σ będzie funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^d$ o wartościach w macierzach $d\times d$, a $b(x)$ funkcją ciągłą z $\mathbb{R}^d$ w $\mathbb{R}^d$, ponadto niech $a = \sigma\sigma^T$. Niech

$$Lf(x) = \sum_{j=1}^d b_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

oraz D będzie otwartym pozdbiorem $\mathbb{R}^d$. Rozpatrzmy równanie

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x.$$

Dla $x\in D$ oraz procesu X_t będącego rozwiązaniem powyższego równania określmy

$$\tau := \inf\{t \geqslant 0\colon X_t \notin D\}.$$

Wykaż, że jeśli istnieje funkcja f klasy C^2 określona na pewnym otoczeniu domknięcia D oraz $c>0$ takie, że $f\geqslant 0$ na D oraz $Lf \leqslant -c$ na D to $\mathbf{E}\tau < \infty$.

3. Przy założeniach i oznaczeniach z zadania 2 załóżmy, że D jest pozbiorem pasa $\{y\colon |y_1| \leqslant R\}$, b_1 jest funkcją ograniczoną na D oraz $a_{1,1}(y) \geqslant \alpha > 0$. Wykaż, że $\mathbf{E}\tau < \infty$. (Wsk. Rozpatrzyć funkcję $f(x) = \cosh rR - \cosh rx_1$.

4. Niech D będzie wnętrzem kąta w $\mathbb{R}^2$ o rozwartości α, $X_t = W_t + x$ dla pewnego $x \in D$, a τ oznacza pierwszy moment wyjścia przez X z D. Udowodnij, że
a) Jeśli $\alpha < \pi/2$ to $\mathbf{E}\tau < \infty$,
b) jeśli $\alpha \geqslant \pi/2$ to $\mathbf{E}\tau = \infty$.
Wsk. a) rozpatrzyć funkcję $f(r, \varphi) = r^2 \sin(\rho(\alpha + \varepsilon - \varphi))$ we wsp. biegunowych, b) Przyjąć $\alpha = \pi/2$ i obliczyć ogon τ z zasady odbicia.

5. Przy oznaczeniach i założeniach zadania 2 załóżmy dodatkowo, że D jest obszarem ograniczonym oraz $X_t = X_t^x$ i $\tau = \tau_x$. Niech g będzie funkcją ciągłą w D, a h ciągłą na ∂D oraz $v(x)$ będzie rozwiązaniem równania

$$\begin{cases} Lv(x) = g(x) & x \in D \\ v(x) = h(x) & x \in \partial D \end{cases}.$$

Załóżmy, że v przedłuża się do funkcji klasy C^2 na otoczeniu domknięcia zbioru D. Wykaż, że

$$v(x) = \mathbf{E}h(X_{\tau_x}^x) - \int_0^{\tau_x} g(X_s^x) ds.$$

6. Załóżmy, że $d = 1$, $D = (\alpha, \beta)$ oraz $a(x) = \sigma^2(x) > \delta > 0$ dla $x \in (\alpha, \beta)$. Oblicz $\mathbf{P}(X_{\tau_x}^x = \alpha)$ dla $x \in (\alpha, \beta)$.

7. Niech M będzie ciągłym martyngałem lokalnym takim, że $\lim_{t\to\infty}\langle M, \rangle_t = \infty$ p.n. Dla $0 \leqslant t < infty$ definiujemy czasy zatrzymania $\tau(t)$ wzorem

$$\tau(t) := \inf\{s \geqslant 0 \colon \langle M \rangle_s > t\}.$$

Wykaż, że proces $B_t := M_{\tau(t)}$ jest jednowymiarowym procesem Wienera.

8. Załóżmy, że M jest ciągłym martyngałem lokalnym na $[0, T)$. Wykaż, że
a) na zbiorze $\{\langle M \rangle_T < \infty\}$ istnieje p.n. skończona granica $\lim_{t\to T-} M_t$
b) na zbiorze $\{\langle M \rangle_T = \infty\}$ p.n. zachodzi $\limsup_{t\to T-} M_t = \infty$ oraz $\liminf_{t\to T-} M_t = -\infty$.

9. Wykaż, że dla $a > 0$ proces $X_t = \xi e^{bt} + \sqrt{a}\int_0^t e^{b(t-s)} dW_s$ jest jedynym rozwiązaniem równania $dX_t = bX_t dt + \sqrt{a} dW_t$ z warunkiem początkowym $X_0 = \xi$. Jeśli $b < 0$ oraz ξ ma rozkład $\mathcal{N}(0, \frac{-a}{2b})$ to X_t jest procesem stacjonarnym (proces Ornsteina-Uhlenbecka)

Zadania z Procesów Stochastycznych II - 7

1. Niech $Z = Z_0 + A_0 + M_0, Y = Y_0 + B_0 + N_0$ będą ciągłymi semimartyngałami. Definiujemy całkę Stratonowicza wzorem
$$\int_0^t Y_s \circ dZ_s := \int_0^t Y_s dZ_s + \frac{1}{2}\langle M, N\rangle.$$
Pokazać, że jeśli f jest funkcją klasy C^3 na $\mathbb{R}$ to
$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s) \circ dZ_s.$$

2. Pokazać, że przy oznaczeniach poprzedniego zadania oraz dowolnym ciągu $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_n}^{(n)}\}$ podziałów odcinka $[0,t]$ takim, że $\mathrm{diam}(\pi_n) \to 0$ zachodzi
$$\sum_{j=1}^{k_n} \frac{Y_{t_{j+1}^{(n)}} - Y_{t_j^{(n)}}}{2}(Z_{t_{j+1}^{(n)}} - Z_{t_j^{(n)}}) \to \int_0^t Y_s \circ dZ_s$$
przy $n \to \infty$ według prawdopodobieństwa.

3. Niech μ oznacza miarę Wienera na $C([0,1])$ (tzn. rozkład wyznaczony przez proces Wienera na $[0,1]$). Dla $h \in C([0,1])$ określamy nową miarę μ_h wzorem $\mu_h(A) := \mu(h + A)$.
a) Wykaż, że jeśli $h(t) = \int_0^t g(s)ds$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$ oraz $g \in L^2[0,1]$ to miara μ_h jest absolutnie ciągła względem μ oraz znaleźć gęstość.
b*) Jeśli h nie ma powyższej postaci to μ i μ_h są wzajemnie singularne.

Trochę zadań z procesów stochastycznych 2

1. Który z poniższych procesów:

$$X_t = \int_0^t \mathrm{sgn} W_s \, dW_s, \quad Y_t = \int_0^t s \, dW_s, \quad Z_t = W_t^2 - t$$

   ($t \in \mathbb{R}_+$) jest a)procesem Wienera, b)martyngałem. Odpowiedź uzasadnić.

2. Niech τ będzie momentem zatrzymania, takim że $E\tau < \infty$. Oznaczmy $M_t = \int_0^t W_s dW_s$ i

$$X_t = \begin{cases} \frac{1}{|W_t|} & \mathrm{gdy} W_t \neq 0 \\ 0 & \mathrm{gdy} W_t = 0 \end{cases}$$

   Pokazać, że $X \in \mathcal{L}^2_\infty(M^\tau)$ i obliczyć $\mathbf{E}\big(\int_0^\infty X dM^\tau\big)^2$.

3. Niech $b, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$. Pokazać, że proces

$$X_t = e^{t(b-\frac{1}{2}\sigma^2)+\sigma W_t}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

   spełnia równanie

$$dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = 1.$$

   Czy równanie to może mieć inne rozwiązania?

4. $\xi = \int_0^1 |W_s| dW_s$. Oblicz $\mathbf{E}\xi$ oraz $\mathrm{Var}\xi$

5. $W = (W^{(1)}, W^{(2)})$ jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^2$, rozważana filtracja jest generowana przez ten proces. Procesy X, Y są prognozowalne i ograniczone. Czy proces

$$\int_0^t X_s \, dW_s^{(1)} \cdot \int_0^t Y_s \, dW_s^{(2)}$$

   jest: semimartyngałem; martyngałem lokalnym, ale niekoniecznie martyngałem; martyngałem.