Wstęp do Procesów Stochastycznych

Rafał Latała

22 kwietnia 2024

Poniższe notatki powstają na podstawie wykładów ze Wstępu do Procesów Stochastycznych, prowadzonego w semestrze wiosennym 2023/24. Gwiazdkami oznaczono treści, pobieżnie omówione w czasie wykładu, które nie będą wymagane na egzaminie.

U Czytelnika zakłada się znajomość podstawowych faktów z zakresu kursowego wykładu z rachunku prawdopodobieństwa. Wszystkie potrzebne wiadomości można znaleźć w podręcznikach [1] i [2].

Większość materiału wykładu można znaleźć w książkach [3] i [7]. Obszerne notatki do wykładu były też przygotowane przez prof. Talarczyk-Noble [6]. Ambitniejszemu Czytelnikowi polecamy monografię [5].

Autor z góry przeprasza za wszystkie nieścisłości i omyłki mogące się pojawić w tekście i jednocześnie zwraca się z prośbś do Czytelników, którzy zauważyli błędy lub mają jakieś inne uwagi na temat notatek o ich zakomunikowanie osobiste lub wysłanie na adres emailowy `rlatala@mimuw.edu.pl` z podaniem wersji notatek (daty), której dotyczą.

Spis treści

1 Podstawowe Przykłady Procesów Stochastycznych

Zaczniemy od podania podstawowych definicji używanych podczas całego wykładu. Podamy też dwa podstawowe przykłady procesów stochastycznych - proces Poissona i proces Wienera.

Definicja 1.1. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, $(E, \mathcal{E})$ przestrzenią mierzalną, zaś T dowolnym zbiorem. *Procesem stochastycznym* o wartościach w E, określonym na zbiorze T nazywamy rodzinę zmiennych losowych $X = (X_t)_{t\in T}$.

Uwaga 1.2. W zasadzie w czasie całego wykładu T będzie podzbiorem $\mathbb{R}$ (najczęściej przedziałem, niekoniecznie ograniczonym), zaś $E = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^d$. Parametr t można wówczas interpretować jako czas.

Definicja 1.3. *Trajektorią procesu* X nazywamy funkcję (losową!) $t \to X_t(\omega)$, określoną na zbiorze T o wartościach w E.

Definicja 1.4. Powiemy, że proces $X = (X_t)_{t\in T}$, $T \subset \mathbb{R}$ *ma przyrosty niezależne* jeśli dla dowolnych indeksów $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ ze zbioru T, zmienne losowe $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ są niezależne.

Definicja 1.5. Mówimy, że proces stochastyczny $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *ma przyrosty stacjonarne*, jeśli rozkład $X_t - X_s$ zależy tylko od $t - s$ czyli

$$\forall_{t>s\geqslant 0}\ X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0.$$

1.1 Proces Poissona

Definicja 1.6. *Procesem Poissona z parametrem (intensywnością)* $\lambda > 0$ nazywamy proces stochastyczny $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$ taki, że

$N_0 = 0;$ (P0)

N ma przyrosty niezależne; (P1)

Dla $0 \leqslant s \leqslant t$ zmienna $N_t - N_s$ ma rozkład $\mathrm{Poiss}(\lambda(t-s))$; (P2)

Trajektorie N są prawostronnie ciągłe. (P3)

Przypomnijmy, że zmienna X ma rozkład $\mathrm{Poiss}(\lambda)$, jeśli X przyjmuje wartości naturalne oraz $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ dla $k = 0, 1, \ldots$.

Uwaga 1.7. i) Warunek (P3) oznacza, że dla wszystkich $\omega \in \Omega$, $t \to N_t(\omega)$ jest funkcją prawostronnie ciągłą na $[0, \infty)$.
ii) Czasami wygodniej jest w definicji procesu Poissona zakładać, że $N_0 = 0$ p.n. oraz, że prawie wszystkie trajektorie N są prawostronnie ciągłe. Tak zmodyfikowana definicja jest niezmiennicza z uwagi na zaburzenia procesu na zbiorze miary zero.

Uwaga 1.8. Proces Poissona (oraz zdefiniowany dalej proces Wienera) stanowią dwa podstawowe przykłady tak zwanych *procesów Levy'ego*. Procesy te mają przyrosty niezależne i stacjonarne oraz prawostronnie ciągłe trajektorie z lewostronnymi granicami.

Uwaga 1.9. Warunki (P0)–(P3) implikują, że prawie wszystkie trajektorie N są niemalejącymi, prawostronnie ciągłymi funkcjami o wartościach naturalnych, z nieskończoną liczbą skoków o wartości 1.

1.1.1 Konstrukcja procesu Poissona

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ (czyli mają gęstość $\lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$). Określmy

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ n = 1, 2, \ldots.$$

oraz

$$N_t = \sup\{n\colon S_n \leqslant t\}. \tag{1}$$

Twierdzenie 1.10. *Proces stochastyczny $(N_t)_{t\geqslant 0}$ zdefiniowany wzorem (1) jest procesem Poissona z intensywnością λ.*

Warunki (P0) i (P3) są spełnione w oczywisty sposób, wystarczy więc sprawdzić (P1) i (P2). Najpierw udowodnimy pewien techniczny lemat.

Lemat 1.11. *Załóżmy, że $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ jest funkcją taką, że $|h| \leqslant 1$ oraz $h(u) = 1$ dla $u \geqslant u_0$. Wówczas zmienna losowa $Y = \prod_{k=1}^{\infty} h(S_k)$ jest dobrze określona, całkowalna oraz*

$$\mathbb{E}Y = \exp\Big(\lambda\int_0^{\infty}(h(u) - 1)\mathrm{d}u\Big).$$

Dowód. Na mocy mocnego prawa wielkich liczb, zmienne S_k zbiegają do nieskończoności prawie na pewno, zatem $h(S_k) = 1$ dla dużych k, czyli zmienna Y jest dobrze określona. Ponadto $|Y| \leqslant 1$, więc Y jest również całkowalna. Stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej dostajemy

$$\mathbb{E}Y = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\prod_{k=1}^{n} h(S_k).$$

Liczymy, stosując zamianę zmiennych

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\prod_{k=1}^{n} h(S_k) \\
&= \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h(x_1)\cdots h(x_1+\ldots+x_n)\lambda^n e^{-\lambda(x_1+\ldots+x_n)}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n \\
&= \lambda^n \int_0^\infty h(u_n)e^{-\lambda u_n}\Bigg(\int_{0\leqslant u_1\leqslant u_2\leqslant\ldots\leqslant u_{n-1}\leqslant u_n}\!\!\!\!\ldots\int h(u_1)\cdots h(u_{n-1})du_1\ldots du_{n-1}\Bigg)\mathrm{d}u_n \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty h(u_n)e^{-\lambda u_n}\Big(\int_0^{u_n}\ldots\int_0^{u_n} h(u_1)\cdots h(u_{n-1})du_1\ldots du_{n-1}\Big)\mathrm{d}u_n \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty h(u)e^{-\lambda u}\Big(\int_0^u h(s)ds\Big)^{n-1}\mathrm{d}u,
\end{aligned}
$$

gdzie w przedostatniej linijce skorzystaliśmy z tego, że funkcja $h(u_1)\cdots h(u_{n-1})$ jest symetryczna względem permutacji zmiennych $u_1,\ldots,u_{n-1}$. Połóżmy $A := \int_0^\infty (h(u)-1)du$, wtedy wobec założenia iż $h(u)=1$ dla $u\geqslant u_0$ dostajemy

$$\int_0^u h(s)ds = u + \int_0^u (h(s)-1)\mathrm{d}s = u + A \text{ dla } u\geqslant u_0.$$

Stąd $\mathbb{E}\prod_{k=1}^n h(S_k) = \alpha_n + \beta_n$, gdzie

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^{u_0} h(u)e^{-\lambda u}\Big[\Big(\int_0^u h(s)ds\Big)^{n-1} - (u+A)^{n-1}\Big]\mathrm{d}u, \\
\beta_n &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-\lambda u}(u+A)^{n-1}\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że $|h(u)|\leqslant 1$ oraz $|\int_0^u h(s)ds|\leqslant u$, a zatem

$$
\begin{aligned}
|\alpha_n| &\leqslant \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^{u_0}(u+|A|)^{n-1}e^{-\lambda u}\mathrm{d}u \leqslant \frac{\lambda^n(u_0+|A|)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-\lambda u}\mathrm{d}u \\
&= \frac{(\lambda(u_0+|A|))^{n-1}}{(n-1)!},
\end{aligned}
$$

czyli $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. By policzyć granicę β_n zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}A^k\int_0^\infty u^{n-1-k}e^{-\lambda u}\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}A^k\lambda^{-n+k}(n-k-1)! = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k A^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

Stąd
$$\mathbb{E}Y = \lim_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) = e^{\lambda A}.$$
□

Wniosek 1.12. *Załóżmy, że $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są rozłącznymi, ograniczonymi podzbiorami $\mathbb{R}_+$ oraz określmy*
$$N(B_i) = \#\{k : S_k \in B_i\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_i}(S_k).$$
Wówczas $N(B_1), \ldots, N(B_n)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathrm{Poiss}(\lambda m(B_k))$, *gdzie m oznacza miarę Lebesgue'a.*

Dowód. Policzymy wielowymiarową funkcję charakterystyczną
$$\mathbb{E}\exp\left(i\sum_{k=1}^{n} t_k N(B_k)\right) = \mathbb{E}\prod_{k=1}^{\infty} h(S_k),$$
gdzie
$$h(x) = \begin{cases} e^{it_k} & x \in B_k \\ 1 & x \notin B_1 \cup \ldots \cup B_n. \end{cases}$$
Mamy
$$\int_0^\infty (h(u)-1)\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n}\int_{B_k}(e^{it_k}-1)\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n} m(B_k)(e^{it_k}-1),$$
czyli na mocy Lematu 1.11,
$$\mathbb{E}\exp\left(i\sum_{k=1}^{n} t_k N(B_k)\right) = \exp\left(\lambda\sum_{k=1}^{n} m(B_k)(e^{it_k}-1)\right).$$
W szczególności
$$\mathbb{E}\exp(itN(B_k)) = \exp(\lambda m(B_k)(e^{it}-1)) = \mathbb{E}\exp(it\mathrm{Poiss}(\lambda m(B_k))),$$
więc $N(B_k)$ ma rozkład $\mathrm{Poiss}(\lambda m(B_k))$, ponadto
$$\mathbb{E}\exp\left(i\sum_{k=1}^{n} t_k N(B_k)\right) = \prod_{k=1}^{n}\exp(it_k N(B_k)),$$
a zatem $N(B_1), \ldots, N(B_n)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi. □

Dowód Twierdzenia 1.10. Zauważmy, że przy oznaczeniach z Wniosku mamy $N_t = N([0,t])$ oraz $N_t - N_s = N((s,t])$ dla $s < t$. Stąd warunki (P1) i (P2) w oczywisty sposób wynikają z Wniosku 1.12. □

1.1.2 Złożony Proces Poissona

Trajektorie procesu Poissona są prawostronnie ciągłe, kawałkami stałe, odległości między skokami są zmiennymi niezależnymi o rozkładzie wykładniczym oraz wszystkie skoki są równe 1. Jeśli odrzucimy ten ostatni warunek, a założymy, iż kolejne skoki są zmiennymi niezależnymi o jednakowym rozkładzie to otrzymamy tzw. *złożony proces Poissona.*

Definicja 1.13. Załóżmy, że $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, a $(N_t)_{t\geqslant 0}$ procesem Poissona z intensywnością λ, niezależnym od zmiennych Δ_i. Wówczas proces $N^\Delta = (N_t^\Delta)_{t\geqslant 0}$ dany wzorem

$$N_t^\Delta = \begin{cases} 0 & N_t = 0 \\ \sum_{n=1}^{N_t} \Delta_n & N_t > 0 \end{cases}$$

nazywamy *złożonym procesem Poissona.*

Zauważmy, że rozkład złożonego procesu Poissona jest wyznaczony przez dwa parametry – intensywność skoków λ i rozkład pojedynczego skoku Δ_1. Wygodnie jest zakładać, że $\mathbb{P}(\Delta_1 = 0) = 0$, by uniknąć sytuacji „pozornego skoku". Zwykły proces Poissona odpowiada sytuacji, gdy $\mathbb{P}(\Delta_1 = 1) = 1$.

Używając Lematu 1.11 można bez trudu wykazać, że

Fakt 1.14. *Niech N^Δ będzie złożonym procesem Poissona. Wówczas $N_0^\Delta = 0$, N^Δ ma przyrosty niezależne i stacjonarne oraz trajektorie prawostronne ciągłe, kawałkami stałe. Odległości między poszczególnymi skokami są zmiennymi niezależnymi, o jednakowym rozkładzie wykładniczym.*

1.1.3 *Charakteryzacje Procesu Poissona*

Fakt 1.15. *Załóżmy, że $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem stochastycznym takim, że $X_0 = 0$, X ma przyrosty niezależne i stacjonarne oraz trajektorie niemalejące, prawostronnie ciągłe, o wartościach całkowitych, skokach równych 1 oraz zbiegające do ∞ w ∞. Wówczas X jest procesem Poissona.*

Idea dowodu polega na tym, że X_t jest sumą przyrostów $X_{kt/n} - X_{(k+1)t/n}$. Przyrosty te mają jednakowe rozkłady, są niezależne i mają wartości całkowite nieujemne. Pokazuje się, że jak n jest duże to z prawdopodobieństwem bliskim 1 wszystkie przyrosty przyjmują tylko wartości 0 lub 1. Zatem X_t aproksymuje się przez rozkład Bernoulliego $\mathrm{Bin}(n, p_n)$. Pokazujemy dalej, że np_n jest ograniczone czyli przechodząć do podciągu $n_k p_{n_k} \to \lambda(t)$, a stąd X_t ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda(t)$. Dalej już łatwo dowodzimy, że $\lambda(t)$ jest funkcją liniową, niemalejącą, czyli jest postaci λt.

Prawdziwe jest znacznie ogólniejsze twierdzenie charakteryzujące złożone procesy Poissona.

Twierdzenie 1.16. *Załóżmy, że dany jest proces stochastyczny* $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ *taki, że* $X_0 = 0$, X *ma przyrosty niezależne i stacjonarne oraz trajektorie prawostronnie ciągłe, kawałkami stałe, ze skończoną liczbą skoków w każdym przedziale skończonym. Wówczas* X *jest złożonym procesem Poissona.*

1.2 Proces Wienera (Ruch Browna)

Definicja 1.17. *Procesem Wienera (Ruchem Browna)* nazywamy proces stochastyczny $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ taki, że

$$W_0 = 0; \tag{W0}$$

$$W \text{ ma przyrosty niezależne;} \tag{W1}$$

$$\text{Dla } 0 \leqslant s < t \text{ zmienna } W_t - W_s \text{ ma rozkład normalny } \mathcal{N}(0, t-s); \tag{W2}$$

$$\text{Trajektorie } W \text{ są ciągłe} \tag{W3}$$

Uwaga 1.18. i) Warunek (W3) oznacza, że dla wszystkich $\omega \in \Omega$, $t \to W_t(\omega)$ jest funkcją ciągłą na $[0, \infty)$.
ii) Czasami wygodniej jest zakładać w definicji procesu Wienera, że $W_0 = 0$ p.n. oraz, że trajektorie W są ciągłe z prawdopodobieństwem 1.
iii) Proces Wienera na skończonym przedziale $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ definiujemy w podobny sposób – jedyna różnica to, że w warunku (W2) zakładamy, że $0 \leqslant s < t \leqslant T$.

1.2.1 Charakteryzacje procesu Wienera

Najpierw podamy twierdzenie, które znacznie ułatwia sprawdzanie, że dany proces jest procesem Wienera. Musimy wpierw podać ważną definicję.

Definicja 1.19. Proces $X = (X_t)_{t\in T}$ nazywamy *gaussowskim*, jeśli wszystkie skończenie wymiarowe rozkłady X są gaussowskie, tzn. wektor $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ ma rozkład gaussowski dla dowolnych $t_1, \ldots, t_n \in T$.

Przykłady

1. $X_t = f(t)g$, gdzie $f\colon T \to \mathbb{R}$ dowolne oraz $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
2. Proces Wienera $(W_t)_{t\geqslant 0}$.
3. Most Browna $X_t = W_t - tW_1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$.
4. Procesy W_t^2, $\sin(W_t)$, e^{W_t} nie są gaussowskie.

Twierdzenie 1.20. *Proces* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *jest procesem Wienera wtedy i tylko wtedy, gdy jest procesem gaussowskim, o ciągłych trajektoriach, startującym z zera, takim, że* $\mathbb{E}X_t = 0$ *oraz* $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \min\{t, s\}$.

Dowód. $\Rightarrow$: Mamy $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}(X_t - X_0) = 0$ oraz $\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}(X_t - X_0) = t$ na mocy (W0) i (W2). Ponadto, z niezależności przyrostów, otrzymujemy dla $t > s$, $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathrm{Cov}(X_t - X_s, X_s) + \mathrm{Var}(X_s) = 0 + s = \min\{t, s\}$.

$\Leftarrow$: Dla $t > s$, zmienna losowa $W_t - W_s$ ma rozkład normalny ze średnią 0 i wariancją $\mathrm{Var}(X_t - X_s) = \mathrm{Var}(X_t) + \mathrm{Var}(X_s) - 2\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = t - s$, więc zachodzi (W2). By sprawdzić niezależność przyrostów ustalmy $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$. Zauważmy, że wektor $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ ma rozkład gaussowski, więc jego współrzędne są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy są nieskorelowane. Mamy jednak dla $s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant s_4$,

$$\mathrm{Cov}(X_{s_1}, X_{s_3} - X_{s_2}) = \mathrm{Cov}(X_{s_1}, X_{s_3}) - \mathrm{Cov}(X_{s_1}, X_{s_2}) = s_1 - s_1 = 0$$

oraz

$$\mathrm{Cov}(X_{s_2} - X_{s_1}, X_{s_4} - X_{s_3}) = \mathrm{Cov}(X_{s_2}, X_{s_4} - X_{s_3}) - \mathrm{Cov}(X_{s_1}, X_{s_4} - X_{s_3}) = 0.$$

□

Uwaga 1.21. Zauważmy, że jeśli $\mathbb{E}X_0 = 0$ oraz $\mathrm{Var}(X_0) = 0$, to $X_0 = 0$ p.n.

Kolejne twierdzenie pokazuje, że (z dokładnością do drobnych technicznych założeń oraz normalizacji) proces Wienera jest jedynym procesem o ciągłych trajektoriach oraz niezależnych i stacjonarnych przyrostach.

Twierdzenie 1.22. *Załóżmy, że proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ spełnia warunki (W0), (W1), (W3) (z W zastąpionym przez X) oraz*

$$X \text{ ma przyrosty stacjonarne;} \tag{W2a}$$
$$\mathbb{E}X_1 = 0,\ \mathrm{Var}(X_1) = 1; \tag{W2b}$$
$$\mathbb{E}X_t^4 < \infty \text{ dla wszystkich } t > 0. \tag{W2c}$$

Wówczas X_t jest procesem Wienera.

Dowód. Określmy dla $t \geqslant 0$, $a(t) = \mathbb{E}X_t$ oraz $b(t) = \mathrm{Var}(X_t)$. Zauważmy, że na mocy niezależności i stacjonarności przyrostów,

$$\begin{aligned} b(t+s) &= \mathrm{Var}(X_{t+s} - X_t + X_t) = \mathrm{Var}(X_{t+s} - X_t) + \mathrm{Var}(X_t) \\ &= \mathrm{Var}(X_s) + \mathrm{Var}(X_t) = b(t) + b(s). \end{aligned}$$

Ponadto oczywiście $b(t) \geqslant 0$, zatem funkcja $b(t)$ jest addytywna i niemalejąca na $[0, \infty)$, więc $b(t) = ct$ dla pewnego $c \geqslant 0$, co wobec (W2b) daje $\mathrm{Var}(X_t) = b(t) = t$. Analogicznie sprawdzamy, że $a(t+s) = a(t) + a(s)$, wiemy też, że $a(0) = 0$, stąd dowodzimy, że $\mathbb{E}X_t = a(t) = 0$ dla t wymiernych. Weźmy $t > 0$ i wybierzmy dążący do t ciąg liczb wymiernych (t_n). Warunek (W2c) implikuje $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$, wiemy też, że $\mathbb{E}X_{t_n}^2 = \mathrm{Var}(X_{t_n}) = t_n$, zatem

$(\mathbb{E}|X_{t_n} - X_t|^2)^{1/2} \leqslant M$ dla pewnej stałej M. Z ciągłości trajektorii $X_{t_n} \to X_t$ prawie na pewno, czyli również według prawdopodobieństwa. Zatem dla $\varepsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{E}X_t| = |\mathbb{E}X_t - \mathbb{E}X_{t_n}| &\leqslant \mathbb{E}|X_t - X_{t_n}| \leqslant \varepsilon + \mathbb{E}|X_t - X_{t_n}|\mathbb{1}_{\{|X_t - X_{t_n}| \geqslant \varepsilon\}} \\
&\leqslant \varepsilon + (\mathbb{E}|X_t - X_{t_n}|^2)^{1/2}\mathbb{P}(|X_t - X_{t_n}| \geqslant \varepsilon)^{1/2} \\
&\leqslant \varepsilon + M\mathbb{P}(|X_t - X_{t_n}| \geqslant \varepsilon)^{1/2} \leqslant 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

dla dostatecznie dużych n. Stąd, wobec dowolności $\varepsilon > 0$, $\mathbb{E}X_t = 0$. Wykazaliśmy zatem, że X_t ma średnią zero i wariancję t.

Ustalmy $t > s \geqslant 0$, chcemy pokazać, że $X_t - X_s$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, t-s)$. Zauważmy, że

$$
X_t - X_s = \sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}, \text{ gdzie } \quad Y_{n,k} = X_{s+k(t-s)/n} - X_{s+(k-1)(t-s)/n}.
$$

Zmienne $(Y_{n,k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ tworzą układ trójkątny, możemy więc skorzystać z Centralnego Twierdzenia Granicznego i wykazać, że $\sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}$ zbiega do $\mathcal{N}(0, t-s)$ według rozkładu. Mamy

$$
\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}Y_{n,k} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_{n,k}) = t - s,
$$

wystarczy więc sprawdzić warunek Lindeberga. Dla $\varepsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
L_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|Y_{n,k}|^2 \mathbb{1}_{\{|Y_{n,k}| \geqslant \varepsilon\}} &\leqslant \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} |Y_{n,k}|^2\Big)\mathbb{1}_{\{\max_{k\leqslant n} |Y_{n,k}| \geqslant \varepsilon\}}\Big] \\
&\leqslant \Big(\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} |Y_{n,k}|^2\Big)^2\Big)^{1/2} \mathbb{P}\Big(\max_{k\leqslant n} |Y_{n,k}| \geqslant \varepsilon\Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że zmienne $(Y_{n,k})$ dla ustalonego n są niezależne i mają średnią zero, zatem

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t - X_s)^4 = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}\Big)^4 &= \sum_{1\leqslant k_1,k_2,k_3,k_4\leqslant n} \mathbb{E}Y_{n,k_1}Y_{n,k_2}Y_{n,k_3}Y_{n,k_4} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}Y_{n,k}^4 + 6\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} \mathbb{E}Y_{n,k}^2\mathbb{E}Y_{n,l}^2 \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}Y_{n,k}^4 + 2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} \mathbb{E}Y_{n,k}^2\mathbb{E}Y_{n,l}^2 = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} |Y_{n,k}|^2\Big)^2.
\end{aligned}
$$

Z ciągłości trajektorii X wynika, że $\mathbb{P}(\max_{k\leqslant n} |Y_{n,k}| \geqslant \varepsilon) \to 0$ przy $n \to \infty$, zatem $\lim_{n\to\infty} L_n(\varepsilon) = 0$. $\square$

Uwaga 1.23. Warunek (W2c) nie jest konieczny - zob. Twierdzenie 5 z paragrafu 13.1 podręcznika [2].

Okazuje się, że również nie trzeba zakładać skończoności wariancji ani nawet istnienia wartości średniej W_1 – warunek (W2b) ma charakter czysto normalizacyjny. Dokładniej zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.24. *Załóżmy, że proces stochastyczny $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ spełnia warunki (W0), (W1), (W2a) i (W3). Wówczas istnieją stałe $a, b \in \mathbb{R}$ i proces Wienera W takie, że $X_t = aW_t + bt$ dla wszystkich $t \geqslant 0$.*

1.2.2 *Proces Wienera jako granica błądzeń losowych*

Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}X_i = 0$ oraz $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Zdefiniujemy błądzenie losowe $(S_n)_{n\geqslant 0}$ wzorami

$$S_0 = 0. \quad S_n = X_1 + \ldots + X_n,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Centralne twierdzenie graniczne łatwo implikuje, że dla $s < t$, zmienne $\frac{S_{\lfloor nt\rfloor} - S_{\lfloor ns\rfloor}}{\sigma\sqrt{n}}$ zbiegają według rozkładu do $\mathcal{N}(0, t-s)$. Zasada niezmienniczości Donskera mówi, że ciąg procesów $(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt\rfloor})_{t\geqslant 0}$ zbiega według rozkładu do procesu Wienera. Sformułowanie tego wyniku w pełnej ogólności jest nieco skomplikowane, gdyż trajektorie $t \to \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt\rfloor}$ nie są ciągłe. By ominąć trudności techniczne przedłużmy liniowo ciąg $(S_n)_{n\geqslant 0}$ do procesu $(S_t)_{t\geqslant 0}$ kładąc

$$S_t := \theta S_n + (1-\theta) S_{n+1} = X_1 + \ldots + X_n + (1-\theta) X_{n+1} \text{ dla } t = \theta n + (1-\theta)(n+1) \in [n, n+1].$$

Twierdzenie 1.25. *Dla każdego $T < \infty$ ciąg procesów $(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{nt})_{t\in[0,T]}$ (traktowany jako wektor losowy o wartościach w przestrzeni $C[0,T]$) zbiega według rozkładu do procesu Wienera $(W_t)_{t\in T}$.*

1.2.3 Konstrukcja procesu Wienera przy pomocy układu Haara

Podczas następnych wykładów podamy dość abstrakcyjną konstrukcję procesu Wienera opartą o ogólniejsze twierdzenia dotyczące istnienia i ciągłości trajektorii procesów stochastycznych. W tym paragrafie omówimy konstrukcję Levy'ego-Ciesielskiego procesu Wienera na $[0, 1]$.

Definicja 1.26. Niech $I(0) = \{1\}, I(n) = \{1, \ldots, 2^{n-1}\}, n = 1, 2, \ldots$. *Układem Haara* nazywamy rodzinę funkcji $(h_{n,k})_{k\in I(n), n=0,1,\ldots}$ określonych na $[0, 1]$ wzorami $h_{0,1}(t) \equiv 1$ oraz dla $k \in I(n), n \geqslant 1$,

$$h_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{dla } (2k-2)2^{-n} \leqslant t < (2k-1)2^{-n} \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & \text{dla } (2k-1)2^{-n} \leqslant t < 2k \cdot 2^{-n} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Definicja 1.27. Przy oznaczeniach poprzedniej definicji *układem Schaudera* nazywamy rodzinę funkcji $(S_{n,k})_{n=0,1,\ldots,k\in I(n)}$ określonych na $[0,1]$ wzorem $S_{n,k}(t)=\int_0^t h_{n,k}(s)ds$.

Fakt 1.28. *a) Układ Haara jest bazą ortonormalną przestrzeni* $L_2[0,1]$.
b) Dla ustalonego $n\geqslant 1$, *funkcje* $(S_{n,k})_{k\in I(n)}$ *mają nośniki o rozłącznych wnętrzach oraz* $\|S_{n,k}\|_\infty = 2^{-(n+1)/2}$.

Część a) powyższego dowodu jest standardowym faktem z analizy funkcjonalnej, a część b) jest bardzo łatwa do sprawdzenia.

Uwaga 1.29. Układ Haara jest bazą Schaudera w przestrzeniach $L_p[0,1]$, $1\leqslant p<\infty$. Po dodaniu funkcji stale równej 1, układ Schaudera staje się bazą Schaudera przestrzeni $C[0,1]$.

Fakt 1.30. *Dla dowolnych* $t,s\in[0,1]$ *mamy*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in I(n)} S_{n,k}(t)S_{n,k}(s)=\min\{t,s\}.$$

Dowód. Najprościej skorzystać z tożsamości Parsevala mówiącej, że dla dowolnej bazy ortonormalnej $(u_i)_{i\in I}$ przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oraz dowolnych $f,g\in\mathcal{H}$ zachodzi

$$\langle f,g\rangle=\sum_{i\in I}\langle f,u_i\rangle\langle g,u_i\rangle.$$

Teza faktu wynika z powyższej tożsamości zastosowanej do $\mathcal{H}=L_2[0,1]$, $f=\mathbb{1}_{[0,s]}$, $g=\mathbb{1}_{[0,t]}$ oraz układu Haara.

Alternatywnie można tezę faktu wykazać za pomocą nieco żmudnych, ale elementarnych rachunków. □

Lemat 1.31. *Niech* g *będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym* $\mathcal{N}(0,1)$. *Wówczas*

$$\mathbb{P}(|g|\geqslant t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_t^\infty e^{-x^2/2}\mathrm{d}x\leqslant e^{-t^2/2},\quad \textit{dla } t\geqslant 0.$$

Dowód. Niech $f(t)=e^{-t^2/2}-\mathbb{P}(|g|\geqslant t)$. Wówczas $f'(t)=e^{-t^2/2}(\sqrt{2/\pi}-t)$, czyli f jest rosnąca na $[0,\sqrt{2/\pi}]$ i malejąca na $[\sqrt{2/\pi},\infty)$. Ponieważ $f(0)=f(\infty)=0$, więc f jest nieujemna na $[0,\infty)$. □

Niech $(g_{n,k})_{k\in I(n),n=0,1,\ldots}$ będzie rodziną niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$ i

$$W_t^{(m)}(\omega)=\sum_{n=0}^{m}\sum_{k\in I(n)} g_{n,k}(\omega)S_{n,k}(t).$$

Twierdzenie 1.32. *Dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ ciąg funkcji $(W_t^{(m)}(\omega))$ zbiega jednostajnie na $[0,1]$ do pewnej funkcji ciągłej $W_t(\omega)$. Jeśli określimy np. $W_t(\omega) = 0$ dla pozostałych ω, to tak zdefiniowany proces stochastyczny jest procesem Wienera na $[0,1]$.*

Dowód. Określmy

$$A_n := \{\max_{k \in I(n)} |g_{n,k}| \geqslant n\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Wówczas $\mathbb{P}(A_n) \leqslant \sum_{k \in Inm)} \mathbb{P}(|g_{n,k}| \geqslant n) \leqslant |I(n)| e^{-n^2/2}$. Zatem $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$, czyli na mocy lematu Borella-Cantelliego $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$. Weźmy $\omega \notin \limsup A_n$, wówczas istnieje n_0 takie, że $\omega \notin A_n$ dla $n \geqslant n_0$, czyli $|g_{n,k}(\omega)| \leqslant n$ dla $n \geqslant n_0$ i $k \in I(n)$. Z uwagi na rozłączność nośników $S_{n,k}$ i oszacowanie $\|S_{n,k}\|_\infty = 2^{-(n+1)/2}$ implikuje to, że $\|\sum_{k \in I(n)} g_{n,k}(\omega) S_{n,k}(t)\|_\infty \leqslant n 2^{-(n+1)/2}$ dla $n \geqslant n_0$. Ponieważ $\sum_n n 2^{-(n+1)/2} < \infty$, więc $W_t^{(m)}(\omega)$ zbiega jednostajnie dla $\omega \notin \limsup A_n$ do pewnego $W_t(\omega)$. Określmy $W_t(\omega) = 0$ dla $\omega \in \limsup A_n$.

Proces $W_t^{(m)}$ ma ciągłe trajektorie, jako skończona kombinacja liniowa funkcji ciągłych, zatem proces W_t ma ciągłe trajektorie. Oczywiście $W_0^{(m)} = 0$, więc $W_0 = 0$.

Zauważmy, że dla ustalonych $t_1, \dots, t_k$, $(W_{t_1}^{(m)}, \dots, W_{t_k}^{(m)}) \to (W_{t_1}, \dots, W_{t_k})$ p.n., zatem również według rozkładu. Granica rozkładów gaussowskich ma rozkład gaussowski (wystarczy spojrzeć na funkcję charakterystyczną), więc proces W_t jest gaussowski.

Ustalmy $t \in [0,1]$, zmienne $g_{n,k} S_{n,k}(t)$ są niezależne i mają średnią 0, zatem są ortogonalne w $L_2(\Omega)$. Ponadto, na mocy Faktu 1.30,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} \mathbb{E}|g_{n,k} S_{n,k}(t)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} S_{n,k}(t)^2 = t < \infty,$$

stąd ciąg $W_t^{(m)}$ jest zbieżny w $L_2(\Omega)$. Ponieważ $W_t^{(m)}$ zbiega do W_t p.n., to $W_t^{(m)}$ zbiega do W_t w $L_2(\Omega)$, a zatem i w $L_1(\Omega)$ W szczególności

$$\mathbb{E} W_t = \lim_{m \to \infty} \mathbb{E} W_t^{(m)} = 0$$

oraz dla $s \leqslant t$

$$\mathrm{Cov}(W_t, W_s) = \mathbb{E} W_t W_s = \lim_{m \to \infty} \mathbb{E} W_t^{(m)} W_s^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} S_{n,k}(t) S_{n,k}(s) = \min\{t, s\}.$$

□

Uwaga 1.33. Mając dany proces Wienera $(W_t)_{t \in [0,1]}$ nietrudno skonstruować proces Wienera na całej prostej. Można np. sprawdzić, że $((1+t) W_{\frac{1}{1+t}} - W_1)_{t \geqslant 0}$ jest takim procesem.

1.2.4 Nieróżniczkowalność trajektorii

Trajektorie procesu Wienera mają wiele ciekawych własności, część z nich poznamy później. W tym paragrafie pokażemy, że mimo iż są ciągłe, to z prawdopodobieństwem 1 nie są różniczkowalne w żadnym punkcie.

Twierdzenie 1.34. *Prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera $(W_t)_{t\geqslant 0}$ są funkcjami nieróżniczkowalnymi w żadnym punkcie, tzn.*

$$\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0\geqslant 0}\ t\to W_t(\omega) \textit{ jest różniczkowalne w } t_0\Big) = 0.$$

Dowód. Najpierw pokażemy nieróżniczkowalność trajektorii na $[0,1)$, tzn.

$$\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0\in[0,1)}\ t\to W_t(\omega) \text{ jest różniczkowalne w } t_0\Big) = 0.$$

Zauważmy, że jeśli funkcja $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $t_0\in[0,1)$ oraz $|f'(t_0)|<M$, to $|f(t)-f(t_0)|\leqslant M|t-t_0|$ dla t dostatecznie bliskich t_0. Zatem, jeśli $j/n\leqslant t_0<(j+1)/n$, to dla dostatecznie dużych n,

$$\Big|f\Big(\frac{j+1}{n}\Big)-f\Big(\frac{j}{n}\Big)\Big| \leqslant \Big|f\Big(\frac{j+1}{n}\Big)-f(t_0)\Big| + \Big|f(t_0)-f\Big(\frac{j}{n}\Big)\Big| \leqslant M\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\Big),$$

$$\Big|f\Big(\frac{j+2}{n}\Big)-f\Big(\frac{j+1}{n}\Big)\Big| \leqslant \Big|f\Big(\frac{j+2}{n}\Big)-f(t_0)\Big| + \Big|f(t_0)-f\Big(\frac{j+1}{n}\Big)\Big| \leqslant M\Big(\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\Big)$$

oraz

$$\Big|f\Big(\frac{j+3}{n}\Big)-f\Big(\frac{j+2}{n}\Big)\Big| \leqslant \Big|f\Big(\frac{j+3}{n}\Big)-f(t_0)\Big| + \Big|f(t_0)-f\Big(\frac{j+2}{n}\Big)\Big| \leqslant M\Big(\frac{3}{n}+\frac{2}{n}\Big).$$

Stąd, jeśli funkcja f jest różniczkowalna w jakimś punkcie przedziału $[0,1)$, to

$$\exists_{M<\infty}\ \exists_{m<\infty}\ \forall_{n\geqslant m}\ \exists_{0\leqslant j\leqslant n-3}\ \forall_{k=0,1,2}\ \Big|f\Big(\frac{j+k+1}{n}\Big)-f\Big(\frac{j+k}{n}\Big)\Big| \leqslant \frac{5M}{n}.$$

Czyli

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0\in[0,1)}\ t\to W_t(\omega) \text{ jest różniczkowalne w } t_0\Big)\\
&\qquad\leqslant \mathbb{P}\Big(\bigcup_{M=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\bigcup_{j=0}^{n-3}\bigcap_{k=0}^{2}\Big\{|W_{\frac{j+k+1}{n}}-W_{\frac{j+k}{n}}|\leqslant\frac{5M}{n}\Big\}\Big)\\
&\qquad\leqslant \sum_{M=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=m}^{\infty}\bigcup_{j=0}^{n-3}\bigcap_{k=0}^{2}\Big\{|W_{\frac{j+k+1}{n}}-W_{\frac{j+k}{n}}|\leqslant\frac{5M}{n}\Big\}\Big).
\end{aligned}$$

Z niezależności przyrostów dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=0}^{2}\Big\{|W_{\frac{j+k+1}{n}}-W_{\frac{j+k}{n}}|\leqslant\frac{5M}{n}\Big\}\Big)&=\prod_{k=0}^{2}\mathbb{P}\Big(|W_{\frac{j+k+1}{n}}-W_{\frac{j+k}{n}}|\leqslant\frac{5M}{n}\Big)\\&=\Big(\mathbb{P}\Big(|W_{\frac{1}{n}}|\leqslant\frac{5M}{n}\Big)\Big)^3=\Big(\mathbb{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}|W_1|\leqslant\frac{5M}{n}\Big)\Big)^3\\&=\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-5M/\sqrt{n}}^{5M/\sqrt{n}}e^{-x^2/2}dx\Big)^3\leqslant\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{10M}{\sqrt{n}}\Big)^3.\end{aligned}$$

Zatem

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=0}^{n-3}\bigcap_{k=0}^{2}\Big\{|W_{\frac{j+k+1}{n}}-W_{\frac{j+k}{n}}|\leqslant\frac{5M}{n}\Big\}\Big)\leqslant\sum_{j=0}^{n-3}\frac{1000M^3}{n^{3/2}}\leqslant\frac{1000M^3}{\sqrt{n}},$$

czyli

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=m}^{\infty}\bigcup_{j=0}^{n-3}\bigcap_{k=0}^{2}\Big\{|W_{\frac{j+k+1}{n}}-W_{\frac{j+k}{n}}|\leqslant\frac{5M}{n}\Big\}\Big)=0$$

i

$$\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0\in[0,1)}\ t\to W_t(\omega)\text{ jest różniczkowalne w }t_0\Big)=0.$$

Nieznacznie modyfikując poprzedni dowód (albo używając faktu, że $\widetilde{W}_t=T^{-1/2}W_{tT}$ też jest procesem Wienera oraz w oczywisty sposób nieróżniczkowalność W na $[0,1)$ jest równoważna nieróżniczkowalności $\widetilde{W}$ na $[0,T)$) dostajemy, że dla $T<\infty$,

$$\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0\in[0,T)}\ t\to W_t(\omega)\text{ jest różniczkowalne w }t_0\Big)=0.$$

By zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0>0}\ t\to W_t(\omega)\text{ jest różniczkowalne w }t_0\Big)\\&\quad=\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\Big(\exists_{t_0\in[0,N)}\ t\to W_t(\omega)\text{ jest różniczkowalne w }t_0\Big)=0.\end{aligned}$$

□

Uwaga 1.35. Dokładna analiza przedstawionego dowodu pokazuje, że nie wykazaliśmy mierzalności zdarzenia $\{\exists_{t_0}\ t\to W_t(\omega)\text{ jest różniczkowalne w }t_0\}$, a jedynie to, że jest ono podzbiorem pewnego zdarzenia miary zero. By uniknąć kłopotów technicznych podobnego rodzaju, wygodnie jest przyjąć, że przestrzeń probabilistyczna $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ jest zupełna, tzn. dowolny podzbiór zbioru miary zero jest mierzalny (każdą przestrzeń probabilistyczną można rozszerzyć do przestrzeni zupełnej).

2 Rozkłady Procesów Stochastycznych

W tej części zdefiniujemy rozkład procesu stochastycznego, w szczególności powiemy jakie zdarzenia określone przez proces są mierzalne. Udowodnimy, że rozkład procesu jest wyznaczony przez rozkłady skończenie wymiarowe. Sformułujemy też warunki, które muszą być spełnione, by istniał proces stochastyczny o zadanych rozkładach skończenie wymiarowych.

Przypomnijmy, że jeśli X jest zmienną losową o wartościach w przestrzeni $(E, \mathcal{E})$, to *rozkładem* X jest miara probabilistyczna na $(E, \mathcal{E})$ zadana wzorem

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A), \ A \in \mathcal{E}.$$

2.1 σ-ciało zbiorów cylindrycznych

Proces $X = (X_t)_{t \in T}$ możemy traktować jako zmienną losową o wartościach w $\mathbb{R}^T$. Jakie podzbiory $\mathbb{R}^T$ są wówczas na pewno mierzalne?

Definicja 2.1. Zbiory postaci

$$\{x \in \mathbb{R}^T \colon (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in A\}, \ t_1, \ldots, t_n \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

nazywamy *zbiorami cylindrycznymi*. Przez $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ będziemy oznaczać najmniejsze σ-ciało zawierające zbiory cylindryczne i będziemy je nazywać *σ-ciałem zbiorów cylindrycznych*.

Uwaga 2.2. Zauważmy, że

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) = \sigma(\{x \in \mathbb{R}^T \colon x_t \in A\}, \ t \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Uwaga 2.3. Nietrudno wykazać, że jeśli zbiór $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, to istnieje zbiór przeliczalny $T_0 \subset T$ taki, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}^T$ oraz $x(t) = y(t)$ dla $t \in T_0$ to $x \in A \Leftrightarrow y \in A$.

Przykłady

1. Następujące zbiory należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$:
   - $\{x \colon x_s > x_t\}$, $s > t \geqslant 0$,
   - $\{x \colon x_{t_1} > 0, x_{t_2} - x_{t_1} > 0, \ldots, x_{t_n} - x_{t_{n-1}} > 0\}$, $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$,
   - $\{x \colon \forall_{t<s, t,s \in \mathbb{Q}_+} \ x_t > x_s\}$.
2. Zbiory
   - $\{x \colon \sup_{t \in T} |x_t| \leqslant 1\}$,
   - $\{x \colon t \to x_t \text{ ciągłe}\}$

   nie należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, gdy T jest niezdegenerowanym przedziałem.

Definicja 2.4. *Rozkładem procesu* $X = (X_t)_{t\in T}$ nazywamy miarę probabilistyczną μ_X na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ daną wzorem

$$\mu_X(C) = \mathbb{P}((X_t)_{t\in T} \in C),\ C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T).$$

Uwaga 2.5. Załóżmy, że T jest przedziałem (skończonym lub nie). Na przestrzeni funkcji ciagłych $C(T)$ rozważmy topologię zbieżności niemal jednostajnej. Wówczas $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \cap C(T) = \mathcal{B}(C(T))$, co oznacza, że jeśli proces $X = (X_t)_{t\in T}$ ma ciągłe trajektorie, to X wyznacza rozkład probabilistyczny na przestrzeni funkcji ciągłych $(C(T), \mathcal{B}(C(T)))$. W szczególności proces Wienera wyznacza pewien rozkład probabilistyczny na $C[0,\infty)$.

2.2 Warunki zgodności. Twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu procesu

Najprostsze zbiory z $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, to zbiory cylindryczne. Miary takich zbiorów to rozkłady skończenie wymiarowe procesu.

Definicja 2.6. Dla procesu $(X_t)_{t\in T}$ o wartościach w $\mathbb{R}$ i $t_1,\ldots,t_n \in T$ określamy miarę $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ na $\mathbb{R}^n$ wzorem

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(A) = \mathbb{P}((X_{t_1},\ldots,X_{t_n}) \in A),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Rodzinę miar $\{\mu_{t_1,\ldots,t_n} \colon t_1,\ldots,t_n \in T \text{ parami różne}\}$ nazywamy rodziną *skończenie wymiarowych rozkładów* procesu X.

Fakt 2.7. *Załóżmy, że* $X = (X_t)_{t\in T}$ *i* $Y = (Y_t)_{t\in T}$ *są procesami o tych samych skończenie wymiarowych rozkładach, czyli*

$$\mathbb{P}((X_{t_1},\ldots,X_{t_n}) \in A) = \mathbb{P}((Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n}) \in A)$$

dla wszystkich $t_1,\ldots,t_n \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. *Wówczas* X *i* Y *mają ten sam rozkład, tzn.*

$$\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(Y \in C) \text{ dla wszystkich } C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T).$$

Dowód. Rodzina zbiorów cylindrycznych $\mathcal{A}$ tworzy π-układ, a rodzina $\mathcal{C}$ zbiorów C takich, że $\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(Y \in C)$, jest λ-układem zawierającym $\mathcal{A}$. Zatem z twierdzenia o π- i λ-układach, $\mathcal{C}$ zawiera również σ-ciało generowane przez $\mathcal{A}$, czyli $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. □

Definicja 2.8. Powiemy, że rodzina skończenie wymiarowych rozkładów

$$\{\mu_{t_1,\ldots,t_n} \colon\ t_1,\ldots,t_n \in T \text{ parami różne}\}$$

spełnia warunki zgodności, jeśli zachodzą następujące warunki:

i) Dla dowolnych $t_1,t_2,\ldots,t_n \in T$, dowolnej permutacji $(i_1,\ldots,i_n)$ liczb $(1,\ldots,n)$ oraz zbiorów $A_1,A_2,\ldots,A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_n}) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n).$$

ii) Dla dowolnych $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \in T$ oraz $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \mathbb{R}) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n).$$

Oczywiście rodzina rozkładów skończenie wymiarowych dowolnego procesu stochastycznego spełnia warunki zgodności. Okazuje się, że są to jedyne warunki jakie należy nałożyć na taką rodzinę.

Twierdzenie 2.9. *Załóżmy, że rodzina skończenie wymiarowych rozkładów* $(\mu_{t_1,\ldots,t_n})$ *spełniająca warunki zgodności. Wówczas istnieje proces* $(X_t)_{t\in T}$ *mający skończenie wymiarowe rozkłady równe* $(\mu_{t_1,\ldots,t_n})$.

Dość techniczny dowód powyższego twierdzenia przedstawimy w osobnej sekcji. Teraz omówimy wnioski i przykłady.

Wniosek 2.10. *Załóżmy, że* $T \subset \mathbb{R}$ *oraz dana jest rodzina rozkładów skończenie wymiarowych* $\{\mu_{t_1,\ldots,t_n} \colon t_1 < t_2 < \ldots < t_n, t_1, \ldots, t_n \in T\}$ *spełniająca warunek*

$$\begin{aligned}\mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times \ldots \times A_{k-1} \times \mathbb{R} \times A_{k+1} \ldots \times A_n)\\ = \mu_{t_1,\ldots t_{k-1},t_{k+1},\ldots,t_n}(A_1 \times \ldots \times A_{k-1} \times A_{k+1} \times \ldots \times A_n).\end{aligned}$$

dla wszystkich $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$ *oraz zbiorów borelowskich* $A_1, \ldots, A_n$. *Wówczas istnieje proces* $(X_t)_{t\in T}$ *taki, że* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *ma rozkład* $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ *dla* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

Dowód. Dla $t_1, \ldots, t_n \in T$ parami różnych istnieje permutacja $(i_1, \ldots, i_n)$ liczb $(1, \ldots, n)$ taka, że $t_{i_1} < t_{i_2} < \ldots < t_{i_n}$. Możemy więc określić $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ jako rozkład wektora $(Y_1, \ldots, Y_n)$ takiego, że $(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_n})$ ma rozkład $\mu_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}$. Można sprawdzić, że tak określona rodzina miar $(\mu_{t_1,\ldots,t_n})$ spełnia warunki zgodności. □

Przykłady

1. Jeśli $(\mu_t)_{t\in T}$ jest dowolną rodziną rozkładów na $\mathbb{R}$, to istnieje rodzina niezależnych zmiennych losowych $(X_t)_{t\in T}$ taka, że X_t ma rozkład μ_t. Używamy tu twierdzenia o istnieniu dla $\mu_{t_1,\ldots,t_n} = \mu_{t_1} \otimes \ldots \otimes \mu_{t_n}$.

2. Istnieje proces spełniający warunki (W0)-(W2) definicji procesu Wienera. Istotnie dla $0 = t_0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ kładziemy

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n} \sim \Big(X_1, X_1 + X_2, \ldots, X_1 + X_2 + \ldots + X_n\Big),$$

gdzie $X_1, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $X_k \sim \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$. Warunki zgodności wynikają wówczas stąd, iż jeśli Y_1, Y_2 są niezależne i $Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ dla $i = 1, 2$, to $Y_1 + Y_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Uwaga 2.11. Dla uproszczenia zakładaliśmy podczas tego wykładu, że proces X_t ma wartości rzeczywiste. Nic się zmieni (poza oczywistymi drobnymi zmianami definicji) dla procesów o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Czasem jednak zachodzi potrzeba rozpatrywania procesów o wartościach w ogólniejszej przestrzeni E. warto więc zauważyć, że

- w Fakcie 2.7 nie wykorzystywaliśmy żadnych własności przestrzeni $\mathbb{R}$,
- w dowodzie Twierdzenia 2.9 wykorzystuje się regularność miar na $\mathbb{R}^n$ – by zachodził dla procesów o wartościach w E, wystarczy założyć, że E jest przestrzenią polską (tzn. ośrodkową, zupełną przestrzenią metryczną) z sigma-ciałem zbiorów borelowskich lub dodać warunek regularności rozpatrywanych miar.

2.3 *Dowód twierdzenia o istnieniu procesu*

Dowód Twierdzenie 2.9 opiera się na dwóch ważnych faktach z teorii miary, które przytoczymy bez dowodu. Pierwszy z nich podaje warunek kiedy funkcję skończenie addytywną na ciele zbiorów można przedłużyć do miary.

Twierdzenie 2.12 (Caratheodory'ego o przedłużaniu miary)**.** *Załóżmy, że $\mathcal{A}$ jest ciałem podzbiorów X, a μ_0 skończenie addytywną funkcją z $\mathcal{A}$ w $\mathbb{R}_+$. Wówczas μ_0 przedłuża się do miary μ na σ-ciele $\sigma(\mathcal{A})$ wtedy i tylko wtedy, gdy μ_0 jest ciągła w $\emptyset$, tzn*

$$\textit{jeśli } (A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, A_1 \supset A_2 \supset \ldots \textit{ oraz } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset, \textit{ to } \lim_{n\to\infty} \mu_0(A_n) = 0. \tag{C}$$

Potrzebny nam też będzie fakt o regularności miar borelowskich na $\mathbb{R}^n$.

Fakt 2.13. *Każda miara skończona na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ jest regularna, tzn. dla dowolnego zbioru borelowskiego A,*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)\colon \ K \textit{ jest zwartym podzbiorem } A\}.$$

Dowód Twierdzenia 2.9. Niech $\mathcal{A}$ oznacza algebrę zbiorów cylindrycznych. Dla $C = \{x\colon (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in A\},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ połóżmy $\mu_0(C) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A)$. Zauważmy, że

- z warunków zgodności wynika, że μ_0 jest dobrze zdefiniowane, tzn. $\mu_0(C)$ nie zależy od wyboru $t_1, \ldots, t_n$ i A reprezentujących C.
- μ_0 jest skończenie addytywna. Istotnie jeśli $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{A}$, to można dobrać odpowiednio duży zbiór indeksów $t_1, \ldots, t_n \in T$ taki, że zbiory $C_1, \ldots, C_k$ zależą tylko od $t_1, \ldots, t_n$, tzn.
$$C_i = \{x\colon (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in A_i\},\ A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$
Załóżmy, że zbiory zbiory $C_1, \ldots, C_k$ są rozłączne. Wówczas zbiory $A_1, \ldots, A_k$ są również rozłączne, a zatem
$$\mu_0\Big(\bigcup_{i=0}^{k} C_i\Big) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}\Big(\bigcup_{i=0}^{k} A_i\Big) = \sum_{i=0}^{k} \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_i) = \sum_{i=0}^{k} \mu_0(C_i).$$

By zakończyć dowód musimy wykazać warunek (C) z twierdzenia Caratheodory'ego, czyli

$$\text{jeśli } C_n \in \mathcal{A},\ C_1 \supset C_2 \supset \ldots,\ \mu_0(C_n) \geqslant \varepsilon > 0, \text{ to } \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset.$$

Każda miara μ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ jest regularna (zob. Twierdzenie A.?), tzn. dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)\colon K \subset A, K \text{ zwarte}\}.$$

Zbiory C_n są cylindryczne, czyli zależą tylko od skończonego zbioru indeksów. Możemy założyć, że te zbiory indeksów rosną, co więcej (ewentualnie powtarzając zbiory C_i lub dodając indeksy) możemy zakładać, że istnieje ciąg $t_1, t_2, \ldots$ taki, że

$$C_n = \{x\colon (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in A_n\} \text{ dla pewnego } A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Na mocy regularności miary $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$, istnieją zbiory zwarte $K_n \subset A_n$ takie, że

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_n \setminus K_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Oznaczając $D_n = \{x : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in K_n\}$, mamy $\mu_0(C_n \setminus D_n) \leqslant 2^{-n-1}\varepsilon$. Niech

$$\widetilde{D}_n = D_1 \cap \ldots \cap D_n = \{x : (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in \widetilde{K}_n\}, \text{ gdzie}$$

$$\widetilde{K}_n = (K_1 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap (K_2 \times \mathbb{R}^{n-2}) \cap \ldots \cap (K_{n-1} \times \mathbb{R}) \cap K_n.$$

Ponieważ $C_n \setminus \widetilde{D}_n = \bigcup_{k=1}^{n}(C_n \setminus D_k) \subset \bigcup_{k=1}^{n}(C_k \setminus D_k)$, więc

$$\mu_0(C_n \setminus \widetilde{D}_n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mu_0(C_k \setminus D_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1}\varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem $\mu_0(\widetilde{D}_n) \geqslant \mu_0(C_n) - \mu_0(C_n \setminus \widetilde{D}_n) \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} > 0$ i w szczególności $\widetilde{D}_n \neq \emptyset$. Niech $x^{(n)} \in \widetilde{D}_n$, wówczas

$$(x_{t_1}^{(n)}, \ldots, x_{t_k}^{(n)}) \in K_k,\ k = 1, \ldots, n.$$

Zbiory K_k są zwarte, co implikuje, że dla dowolnego k, ciąg $(x_{t_k}^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony. Za pomocą metody przekątniowej możemy wybrać podciąg (n_i) taki, że $\lim_{i\to\infty} x_{t_k}^{(n_i)} = x_{t_k}^{\infty}$ dla $k = 1, 2, \ldots$. Ale wówczas, z domkniętości K_k,

$$(x_{t_1}^{\infty}, \ldots, x_{t_k}^{\infty}) = \lim_{n_i\to\infty}(x_{t_1}^{(n_i)}, \ldots, x_{t_k}^{(n_i)}) \in K_k.$$

Określmy $y \in \mathbb{R}^T$ wzorem

$$y_t = \begin{cases} x_t^{\infty} & \text{dla } t \in \{t_1, t_2, \ldots\}, \\ 0 & \text{dla } t \notin \{t_1, t_2, \ldots\}. \end{cases}$$

Wówczas $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, czyli $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$, co chcieliśmy dowieść.

Wiemy zatem, że na $\Omega = \mathbb{R}^T$ istnieje miara probabilistyczna μ rozszerzająca μ_0. Wtedy dla $t_1, \ldots, t_n \in T$ oraz $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$\mu(\{x\colon (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in A\}) = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A).$$

Zatem na przestrzeni probabilistycznej $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T), \mu)$ wystarczy zdefiniować proces X wzorem $X_t(x) = x_t$. $\square$

3 Ciągłość trajektorii

Wiemy już kiedy istnieje proces o zadanych skończenie wymiarowych rozkładach. Nasuwa się pytanie – kiedy taki proces ma ciągłe trajektorie? Zanim jednak zastanowimy się nad odpowiedzią wprowadzimy dwa ważne sposoby porównywania procesów.

3.1 Procesy stochastycznie równoważne i nierozróżnialne

Definicja 3.1. Niech $X = (X_t)_{t\in T}$ oraz $Y = (Y_t)_{t\in T}$ będą dwoma procesami stochastycznymi, określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Powiemy, że:
a) X jest *modyfikacją* Y (lub X jest *stochastycznie równoważny* Y), jeśli

$$\forall_{t\in T}\ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

b) X i Y są nierozróżnialne, jeśli

$$\mathbb{P}(\forall_{t\in T}\ X_t = Y_t) = 1.$$

Zauważmy, że procesy nierozróżnialne są oczywiście stochastycznie równoważne. Ponadto dwa procesy stochastycznie równoważne mają ten sam rozkład. Poniższy przykład pokazuje, że z rozkładu procesu nie można wnioskować o własnościach trajektorii.

Przykład

Niech $Z \geqslant 0$ będzie dowolną zmienną losową o rozkładzie bezatomowym tzn. $\mathbb{P}(Z = z) = 0$ dla wszystkich $z \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy dwa procesy na $T = [0, \infty)$:

$$X_t \equiv 0 \quad \text{oraz} \quad Y_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq Z(\omega), \\ 1 & \text{dla } t = Z(\omega). \end{cases}$$

Wówczas Y jest modyfikacją X, bo $\mathbb{P}(X_t \neq Y_t) = \mathbb{P}(Z = t) = 0$. Zauważmy jednak, że wszystkie trajektorie Y są nieciągłe, czyli w szczególności $\mathbb{P}(\forall_{t\neq 0}\ X_t = Y_t) = 0$, a zatem procesy X i Y nie są nierozróżnialne.

Fakt 3.2. *Załóżmy, że T jest przedziałem oraz procesy $X = (X_t)_{t\in T}$ i $Y = (Y_t)_{t\in T}$ mają prawostronnie ciągłe trajektorie. Wówczas, jeśli X jest modyfikacją Y, to X i Y są nierozróżnialne.*

Dowód. Wybierzmy przeliczalny podzbiór $T_0 \subset T$, gęsty w T, zawierający dodatkowo $\sup T$, jeśli T jest przedziałem prawostronnie domkniętym. Niech

$$A = \{\forall_{t \in T_0}\ X_t = Y_t\},$$

wówczas $\mathbb{P}(A) = 1$, jako przeliczalne przecięcie zbiorów pełnej miary. Ponadto, jeśli $\omega \in A$, to dla dowolnego $t \in T \setminus \{\sup T\}$,

$$X_t(\omega) = \lim_{s \to t+, s \in T_0} X_s(\omega) = \lim_{s \to t+, s \in T_0} Y_s(\omega) = Y_t(\omega),$$

czyli

$$\mathbb{P}(\forall_{t \in T}\ X_t = Y_t) \geqslant \mathbb{P}(A) = 1.$$

$\square$

3.2 Twierdzenie o ciągłej modyfikacji

Najważniejsze twierdzenie tego wykładu podaje kryterium istnienia modyfikacji procesu, która ma ciągłe trajektorie. Zanim sformułujemy dokładny wynik przypomnijmy definicję hölderowskości.

Definicja 3.3. Funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest hölderowsko ciągła z wykładnikiem γ, jeśli dla pewnej stałej $C < \infty$,

$$|f(s) - f(t)| \leqslant C|t-s|^\gamma \text{ dla wszystkich } s,t \in [a,b].$$

Twierdzenie 3.4. *Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \in [a,b]}$ jest procesem takim, że*

$$\forall_{t,s \in [a,b]}\ \mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \leqslant C|t-s|^{1+\beta} \tag{2}$$

dla pewnych stałych dodatnich α, β, C. Wówczas istnieje proces $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t)_{t \in [a,b]}$, będący modyfikacją procesu X, którego wszystkie trajektorie są ciągłe. Co więcej trajektorie każdej modyfikacji X o ciągłych trajektoriach są, z prawdopodobieństwem 1, hölderowsko ciągłe z dowolnym wykładnikiem $\gamma < \frac{\beta}{\alpha}$.

Wniosek 3.5. *Twierdzenie 3.4 jest prawdziwe, gdy przedział $[a,b]$ zastąpimy nieskończonym przedziałem, o ile hölderowskość trajektorii zastąpimy lokalną hölderowskością (tzn. hölderowskością na każdym przedziale skończonym). Co więcej, wystarczy, by warunek (2) zachodził dla $|s-t| \leqslant \delta$, gdzie δ jest ustaloną liczbą dodatnią.*

Dowód. Przedział nieskończony T można zapisać jako przeliczalną sumę przedziałów $[a_n, a_{n+1}]$, długości nie większej od δ. Z Twierdzenia 3.4 wynika istnienie modyfikacji $\widetilde{X}_t^{(n)}$ procesu X

na przedziale $[a_n, a_{n+1}]$, o ciągłych trajektoriach. Niech $A_n = \{\widetilde{X}^{(n)}_{a_{n+1}} \neq \widetilde{X}^{(n+1)}_{a_{n+1}}\}$, wówczas $A = \bigcup_n A_n$ ma miarę zero. Możemy więc położyć:

$$\widetilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \widetilde{X}^{(n)}_t(\omega) & \text{dla } t \in [a_n, a_{n+1}],\ \omega \notin A \\ 0 & \text{dla } \omega \in A. \end{cases}$$

□

Dowód Twierdzenia 3.4. Ustalmy $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$ i niech

$$D := \{t \in [a,b] \colon t = 2^{-n}k,\ n = 1, 2, \dots, k \in \mathbb{Z}\}$$

oznacza zbiór liczb dwójkowo wymiernych z $[a,b]$. Wówczas

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n,\ \text{gdzie } D_n := \{t \in [a,b] \colon t = 2^{-n}k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Na mocy nierówności Czebyszewa,

$$\mathbb{P}(|X_t - X_s| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-\alpha}\mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \leqslant C\varepsilon^{-\alpha}|t-s|^{1+\beta},$$

w szczególności

$$\mathbb{P}\big(|X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}| \geqslant 2^{-\gamma n}\big) \leqslant C 2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)}.$$

Zatem, dla ustalonego n,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(\max_{a \leqslant \frac{k}{2^n} < \frac{k+1}{2^n} \leqslant b} |X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}| \geqslant 2^{-\gamma n}\Big) &\leqslant \sum_{a \leqslant \frac{k}{2^n} < \frac{k+1}{2^n} \leqslant b} \mathbb{P}\big(|X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}| \geqslant 2^{-\gamma n}\big) \\ &\leqslant 2^n(b-a)C2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)} = C(b-a)2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy $A := \limsup A_n$, gdzie

$$A_n := \Big\{\max_{a \leqslant 2^{-n}k < 2^{-n}(k+1) \leqslant b} |X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}| \geqslant 2^{-\gamma n}\Big\}.$$

Nierówność $\gamma\alpha < \beta$ implikuje, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} C(b-a)2^{-n(\beta-\alpha\gamma)} < \infty.$$

zatem, na mocy lematu Borela-Cantelliego, $\mathbb{P}(A) = 0$, czyli $\mathbb{P}(B) = 1$, gdzie

$$B = \Omega \setminus A = \Big\{\omega \colon \exists_{n_0(\omega)} \forall_{n \geqslant n_0(\omega)} \forall_{a \leqslant 2^{-n}k < 2^{-n}(k+1) \leqslant b}\ |X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}| < 2^{-\gamma n}\Big\}.$$

Załóżmy, że $\omega \in B$, pokażemy wpierw, indukcyjnie po m, że

$$\forall_{n \geqslant n_0(\omega)} \forall_{m \geqslant n} \forall_{s,t \in D_m} \ |s-t| \leqslant 2^{-n} \Rightarrow |X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leqslant 2 \sum_{j=n}^{m} 2^{-\gamma j}. \tag{3}$$

Dla $m = n$, jeśli $|s-t| \leqslant 2^{-n}$, to możemy przyjąć, że $s = \frac{k}{2^n}, t = \frac{k+1}{2^n}$ i $|X_s - X_t| = |X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}}| < 2^{-\gamma n}$ na mocy definicji B.

Załóżmy zatem, że (3) jest udowodnione dla $m = n, n+1, \ldots, M-1$, pokażemy, że zachodzi również dla $m = M$. Niech $s, t \in D_M, s < t$, możemy założyć, że $|s-t| > 2^{-M}$, bo inaczej działa argument przedstawiony w pierwszym kroku indukcji. Połóżmy

$$\tilde{s} = \min\{u \in D_{M-1}, u > s\}, \ \tilde{t} = \max\{u \in D_{M-1}, u < t\},$$

wówczas $s \leqslant \tilde{s} \leqslant \tilde{t} \leqslant t$, czyli $|\tilde{s} - \tilde{t}| \leqslant |s-t| \leqslant 2^{-n}$. Stąd, wobec założenia indukcyjnego, $|X_{\tilde{s}}(\omega) - X_{\tilde{t}}(\omega)| \leqslant 2\sum_{j=n}^{M-1} 2^{-\gamma j}$. Ponadto, $|s - \tilde{s}| \leqslant 2^{-M}$, $|t - \tilde{t}| \leqslant 2^{-M}$, czyli

$$\begin{aligned} |X_s(\omega) - X_t(\omega)| &\leqslant |X_{\tilde{s}}(\omega) - X_{\tilde{t}}(\omega)| + |X_{\tilde{s}}(\omega) - X_s(\omega)| + |X_t(\omega) - X_{\tilde{t}}(\omega)| \\ &\leqslant 2\sum_{j=n}^{M-1} 2^{-\gamma j} + 2^{-\gamma M} + 2^{-\gamma M} = 2\sum_{j=n}^{M} 2^{-\gamma j}, \end{aligned}$$

co kończy dowód (3).

Wiemy zatem, że dla $\omega \in B$,

$$s, t \in D, |s-t| \leqslant 2^{-n}, n \geqslant n_0(\omega) \Rightarrow |X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leqslant 2\sum_{j=n}^{\infty} 2^{-\gamma j} = C_\gamma 2^{-\gamma n},$$

gdzie C_γ jest stałą zależną tylko od γ. Weźmy teraz dowolne $s, t \in D$ takie, że $|s-t| \leqslant 2^{-n_0(\omega)}$, wówczas istnieje $n \geqslant n_0(\omega)$ spełniające $2^{-n-1} < |s-t| \leqslant 2^{-n}$ i

$$|X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leqslant C_\gamma 2^{-\gamma n} \leqslant 2^\gamma C_\gamma |s-t|^\gamma.$$

W końcu, dla dowolnych $s, t \in D$, możemy dobrać ciąg $s = s_0 < s_1 < \ldots < s_k = t$, $k \leqslant 2^{n_0(\omega)}(b-a)$ taki, że $s_i \in D$, $|s_{i+1} - s_i| \leqslant 2^{-n_0(\omega)}$ i otrzymamy

$$\begin{aligned} |X_s(\omega) - X_t(\omega)| &\leqslant \sum_{i=1}^{k} |X_{s_i}(\omega) - X_{s_{i+1}}(\omega)| \leqslant \sum_{i=1}^{k} 2^\gamma \tilde{C}_\gamma |s_i - s_{i-1}|^\gamma \\ &\leqslant (b-a) 2^{n_0(\omega)} 2^\gamma \tilde{C}_\gamma |t-s|^\gamma. \end{aligned}$$

Udowodniliśmy zatem, że dla $\omega \in B$, funkcja $t \to X_t(\omega)$ jest hölderowsko ciągła na D, w szczególności jest jednostajnie ciągła i w każdym punkcie z $[a, b]$ ma granicę. Połóżmy

$$\widetilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{s \to t, s \in D} X_s(\omega) & \text{dla } \omega \in B, \\ 0 & \text{dla } \omega \notin B. \end{cases}$$

Wówczas wszystkie trajektorie $\widetilde{X}$ są ciągłe (a nawet hölderowsko ciągłe z wykładnikiem γ). Z nierówności Czebyszewa łatwo wynika, że dla dowolnego ciągu $(t_n) \subset D$, zbieżnego do $t \in [a,b]$, $X_{t_n} \to X_t$ według prawdopodobieństwa. Z drugiej strony $X_{t_n} \to \widetilde{X}_t$ p.n., a więc również według prawdopodobieństwa. Z jednoznaczności granicy wynika, że $\widetilde{X}_t = X_t$ p.n., czyli proces $\widetilde{X}$ jest modyfikacją X.

Na koniec zauważmy, że trajektorie $\widetilde{X}$ są hölderowsko ciągłe z wykładnikiem γ, a skoro wiemy, ze wszystkie ciągłe modyfikacje X są nierozróżnialne, to wszystkie ciągłe modyfikacje X mają, z prawdopodobieństwem 1, hölderowsko ciągłe trajektorie z dowolnym wykładnikiem $\gamma < \frac{\alpha}{\beta}$. □

Wniosek 3.6. *Istnieje proces Wienera, tzn. proces spełniający warunki (W0)-(W3).*

Dowód. Mamy $\mathbb{E}|W_s - W_t|^4 = \mathbb{E}|\sqrt{t-s}W_1|^4 = (s-t)^2\mathbb{E}W_1^4 = 3(s-t)^2$ i możemy zastosować Wniosek 3.5 z $\beta = 1$, $\alpha = 4$ i $C = 3$. □

Wniosek 3.7. *Prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera są lokalnie Hölderowsko ciągłe z dowolnym parametrem $\gamma < 1/2$.*

Dowód. Mamy $\mathbb{E}|W_s - W_t|^p = (s-t)^{p/2}\mathbb{E}W_1^p = C_p(s-t)^{p/2}$ dla dowolnego $p < \infty$. Stosując wniosek 3.5, z $\beta = p/2 - 1$ i $\alpha = p$, otrzymujemy lokalną Hölderowską ciągłość trajektorii z dowolnym $\gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Biorąc $p \to \infty$ dostajemy tezę. □

Uwaga 3.8. Prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera nie są jednostajnie ciągłe na $[0, \infty)$, nie mogą więc być globalnie Hölderowskie z żadnym wykładnikiem.

Uwaga 3.9. Założenia $\beta > 0$ nie można opuścić – wystarczy rozważyć proces Poissona dla którego $\mathbb{E}|N_t - N_s| = \lambda|t-s|$, a oczywiście proces Poissona przyjmuje wartości całkowite, więc nie ma modyfikacji o ciągłych trajektoriach.

3.3 Inne rodzaje ciągłości procesów

W tym wykładzie koncentrowaliśmy uwagę nad procesami o trajektoriach ciągłych. Warto jednak wspomnieć o innych formach ciągłości procesów stochastycznych.

Definicja 3.10. Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ będzie procesem stochastycznym. Mówimy, że
a) proces X jest *stochastycznie ciągły*, jeśli

$$t_n \to t \ \Rightarrow \ X_{t_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t.$$

b) proces X jest *ciągły wg p-tego momentu (ciągły w L_p)*, jeśli

$$t_n \to t \ \Rightarrow \ \mathbb{E}|X_{t_n} - X_t|^p \to 0.$$

Uwaga 3.11. Nietrudno wykazać, że zarówno ciągłość trajektorii jaki i ciągłość wg p-tego momentu implikują ciągłość stochastyczną procesu. Z pozostałych czterech implikacji między powyższymi pojęciami ciągłości procesu żadna nie jest prawdziwa bez dodatkowych założeń.

4 Procesy gaussowskie

4.1 Przypomnienie podstawowych faktów o wektorach gaussowskich

Definicja 4.1. Wektor losowy $X = (X_1, \ldots, X_n)$ w $\mathbb{R}^n$ nazywamy *gaussowskim*, jeśli ma funkcję charakterystyczną postaci

$$\varphi_X(t) = e^{i\langle t,a\rangle - \frac{\langle Ct,t\rangle}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}^n$$

dla pewnego $a \in \mathbb{R}^n$ i symetrycznej, nieujemnie określonej macierzy $C \in M_{n\times n}$. Używamy oznaczenia $X \sim \mathcal{N}(a, C)$. W przypadku, gdy $a = 0$ oraz $C = \mathrm{Id}$, X nazywamy kanonicznym wektorem gaussowskim.

Każdy wektor gaussowski ma ten sam rozkład co afiniczny obraz wektora gaussowskiego – jeśli $X \sim \mathcal{N}(a, C)$, to $X \sim a + \sqrt{C}Y$, gdzie $Y \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$. Wektory gaussowskie są zamknięte ze względu na przekształcenia afiniczne.

Jeśli $X \sim \mathcal{N}(a, C)$, to $\mathbb{E}X = a$ oraz $\mathrm{Cov}(X) = C$. W szczególności rozkład wektora gaussowskiego jest jednoznacznie wyznaczony przez wektor wartości średniej i macierz kowariancji.

Uwaga 4.2. Można wykazać, że $X \sim \mathcal{N}(a, C)$ ma gęstość wtedy i tylko wtedy gdy macierz kowariancji C jest odwracalna i wówczas ta gęstość wynosi

$$g_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det C}} \exp\Big(\frac{\langle C^{-1}(x-a), x-a\rangle}{2}\Big).$$

Twierdzenie 4.3. *Jeśli wektor losowy $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ma rozkład gaussowski to zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy są nieskorelowane, tzn. gdy $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ dla $i \neq j$.*

Dowód. $\Rightarrow$: Dowolne zmienne niezależne są nieskorelowane.

$\Leftarrow$: Macierz $C = \mathrm{Cov}(X)$ jest diagonalna, zatem

$$\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t) = e^{i\langle t,a\rangle - \frac{\langle Ct,t\rangle}{2}} = \prod_{j=1}^{n} e^{it_j a_j - \frac{c_{j,j}t_j^2}{2}} = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t_j),$$

co dowodzi niezależności X_j. □

Uwaga 4.4. Kluczowym założeniem w Twierdzeniu 4.3 jest gaussowskość wektora X, a nie tylko jego współrzędnych. Łatwo skonstruować dwie zależne zmienne X_1, X_2 takie, że $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ oraz $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

4.2 Procesy gaussowskie – definicja i podstawowe własności

Przypomnijmy definicję, która już się pojawiła przy omawianiu procesu Wienera.

Definicja 4.5. Proces $X = (X_t)_{t\in T}$ nazywamy *gaussowskim*, jeśli wszystkie skończenie wymiarowe rozkłady X są gaussowskie czyli wektor $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ ma rozkład gaussowski dla dowolnych $t_1, \ldots, t_n \in T$.

Przykłady

1. $X_t = f(t)g$, gdzie $f\colon T \to \mathbb{R}$ dowolne, a $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
2. Proces Wienera $(W_t)_{t\geqslant 0}$.
3. Most Browna $X_t = W_t - tW_1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$.

Wiemy, że wielowymiarowe rozkłady gaussowskie są wyznaczone przez dwa parametry – wektor wartości średniej i macierz kowariancji. Podobnie jest w przypadku procesów, by sformułować odpowiednie twierdzenie, najpierw wprowadzimy stosowne definicje.

Definicja 4.6. Załóżmy, że $X = (X_t)_{t\in T}$ jest procesem stochastycznym całkowalnym z kwadratem, tzn. $\mathbb{E}X_t^2 < \infty$ dla wszystkich $t \in T$. *Funkcję wartości średniej (wartość średnią procesu)* X definiujemy wówczas wzorem $m(t) := \mathbb{E}X_t,\ t \in T$, a *funkcję kowariancji* X wzorem $K(t, s) := \mathrm{Cov}(X_t, X_s),\ t, s \in T$. Proces X nazywamy *scentrowanym*, jeśli $m \equiv 0$.

Fakt 4.7. *Funkcja kowariancji procesu stochastycznego jest nieujemnie określona tzn.*

$$\forall_{t_1,\ldots,t_n\in T}\ \forall_{x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}}\ \sum_{i,j=1}^{n} K(t_i, t_j)x_i x_j \geqslant 0.$$

Dowód. Liczymy

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(t_i, t_j)x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_{t_i}, X_{t_j})x_i x_j = \mathrm{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_{t_i}x_i, \sum_{j=1}^{n} X_{t_i}x_i\Big)$$
$$= \mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_{t_i}x_i\Big) \geqslant 0.\square$$

Wiemy już, że proces Wienera można scharakteryzować jako scentrowany proces gaussowskim o ciągłych trajektoriach i funkcji kowariancji $K(t, s) = \min(t, s)$. Poniższe twierdzenie pokazuje, że rozkład procesu gaussowskiego jest jednoznacznie wyznaczony przez dwie funkcje – wartość średnią i kowariancję.

Twierdzenie 4.8. *a) Niech $m\colon T \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją, a $K\colon T \times T \to \mathbb{R}$ symetryczną funkcją nieujemnie określoną. Wówczas istnieje proces gaussowski o wartości średniej m i funkcji kowariancji K.*
b) Jeśli dwa procesy gaussowskie mają takie same funkcje kowariancji i wartości średniej, to mają ten sam rozkład.

Dowód. a) Dla $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ określamy $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ jako rozkład wektora gaussowskiego $(X_1, \ldots, X_n)$ takiego, że $\mathbb{E}X_i = m(t_i)$ oraz $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = K(t_i, t_j)$ (wektor taki istnieje bo macierz $(K(t_i, t_j))_{i,j\leqslant n}$ jest symetryczna nieujemnie określona. Łatwo sprawdzić (wykorzystując to, że n-wymiarowy rozkład gaussowski jest zadany przez dwa parametry), że rodzina miar $(\mu_{t_1,\ldots,t_n})$ spełnia warunki zgodności, zatem z Twierdzenia 2.9 wynika istnienie szukanego procesu.

b) Ponieważ n-wymiarowe rozkłady gaussowskie są wyznaczone przez wektor średniej i macierz kowariancji, więc rozważane dwa procesy mają te same rozkłady skończenie wymiarowe, czyli na mocy Faktu 2.7 mają te same rozkłady. □

Uwaga 4.9. Załóżmy, że X jest ośrodkową przestrzenią Banacha. Powiemy, że zmienna losowa o wartościach w X ma rozkład gaussowski, jeśli dla dowolnego funkcjonału ciągłego $x^* \in X^*$ zmienna rzeczywista $x^*(X)$ ma rozkład gaussowski. Proces Wienera na skończonym przedziale $[0, T]$ można traktować jako gaussowską zmienną losową o wartościach w $C[0, T]$.

4.3 Proces Ornsteina-Uhlebecka

Definicja 4.10. *Proces Ornsteina-Uhlenbecka z parametrem* $\beta > 0$ określamy wzorem

$$X_t = e^{-\beta t} W_{e^{2\beta t}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zauważmy, że zbiór indeksów procesu Ornsteina-Uhlebecka to cała prosta rzeczywista.

Proces Ornsteina-Uhlenbecka jest gaussowski, ma ciągłe trajektorie, średnią zero i funkcję kowariancji

$$K(s, t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = e^{-\beta s} e^{-\beta t} e^{2\beta(t \wedge s)} = e^{-\beta|t-s|}.$$

Fakt 4.11. *Proces Ornsteina-Uhlenbecka $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ jest procesem stacjonarnym, tzn. dla dowolnego $h \in \mathbb{R}$ proces $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ma ten sam rozkład, co $(X_{t+h})_{t\in\mathbb{R}}$*

Dowód. Proces $Y_t := X_{t+h}$, $t \in \mathbb{R}$, jest gaussowski, ma średnią zero i funkcję kowariancji równą $K_Y(t, s) = K_X(t + h, s + h) = K_X(t, s)$. Zatem, na mocy twierdzenia 4.8, X i Y mają ten sam rozkład. □

4.4 Ułamkowy Ruch Browna

Definicja 4.12. Niech $H \in (0, 1]$. Proces gaussowski $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ o średniej zero, funkcji kowariancji

$$K(s, t) = K_H(s, t) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}\right) \tag{4}$$

oraz ciągłych trajektoriach nazywa się *ułamkowym ruchem Browna z parametrem (Hursta) H*.

Uwaga 4.13. W literaturze się często rozważa ułamkowy ruch Browna tylko na $[0,\infty)$.

Zauważmy, że dla $H=1/2$ oraz $s,t\geqslant 0$ dostajemy

$$K_{1/2}(s,t)=K_{1/2}(-s,-t)=\frac{1}{2}(s+t-|t-s|)=s\wedge t,\quad K_{1/2}(-s,t)=\frac{1}{2}(s+t-(t+s))=0,$$

zatem jeśli $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ jest ułamkowym ruchem Browna z parametrem $1/2$, to procesy $(X_t)_{t\geqslant 0}$ i $(X_{-t})_{t\geqslant 0}$ są niezależnymi procesami Wienera.

Dla $H=1$, $K_1(s,t)=st=\mathrm{Cov}(sg,tg)$, gdzie g ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, zatem 1-ułamkowy proces Wienera można określić wzorem $X_t=tg$, $t\in\mathbb{R}$.

By udowodnić istnienie ułamkowego ruchu Browna dla $H\in(0,1)$, sprawdzimy najpierw nieujemną określoność funkcji K_H. Jest ona konsekwencją następującego lematu.

Lemat 4.14. *Dla $0<H<1$ istnieje stała $c_H>0$ taka, że*

$$|t|^{2H}=c_H\int_{\mathbb{R}}\frac{1-\cos(tx)}{|x|^{2H+1}}\mathrm{d}x,\qquad t\in\mathbb{R}$$

Dowód. Całka jest dobrze określona, bo w otoczeniu zera funkcja podcałkowa jest rzędu $\frac{1}{2}(tx)^2|x|^{-2H-1}=\frac{1}{2}t^2|x|^{1-2H}$, ponadto jest nieujemna i szacuje się z góry przez $|x|^{-1-2H}$. Wykładnik $1-2H$ jest większy od -1 a $-1-2H$ mniejszy od -1, więc funkcja podcałkowa jest całkowalna na $\mathbb{R}$. Podstawienie $y=tx$ pokazuje, że

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1-\cos(tx)}{|x|^{2H+1}}\mathrm{d}x=|t|^{2H}\int_{\mathbb{R}}\frac{1-\cos(y)}{|y|^{2H+1}}\mathrm{d}y.$$

$\square$

Wniosek 4.15. *Funkcja $K_H(s,t)=\frac{1}{2}\left(|s|^{2H}+|t|^{2H}-|t-s|^{2H}\right)$ jest nieujemnie określona.*

Dowód. Na mocy lematu mamy

$$\begin{aligned}K_H(s,t)&=\frac{c_H}{2}\int_{\mathbb{R}}\frac{1-\cos(tx)-\cos(sx)+\cos((t-s)x)}{|x|^{2H+1}}\mathrm{d}x\\&=\frac{c_H}{2}\int_{\mathbb{R}}\frac{(1-\cos(tx))(1-\cos(sx))+\sin(tx)\sin(sx)}{|x|^{2H+1}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ponadto funkcje $f_1(s,t)=(1-\cos(tx))(1-\cos(sx))$ i $f_2(s,t)=\sin(tx)\sin(sx)$ są nieujemnie określone na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$. $\square$

Twierdzenie 4.16. *Dla dowolnego $H\in(0,1]$ istnieje ułamkowkowy ruch Browna z parametrem H.*

Dowód. Dla $H = 1$ wystarczy określić $X_t = tg$, dalej będziemy rozpatrywać $H \in (0,1)$. Twierdzenie 4.8 oraz wniosek 4.15 implikują istnienie scentrowanego procesu gaussowskiego X_t o funkcji kowariancji $K_H(s,t)$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_t - X_s) &= \mathrm{Var}(X_t) + \mathrm{Var}(X_s) - 2\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = K_H(s,s) + K_H(t,t) - 2K_H(s,t)\\ &= |s-t|^{2H}.\end{aligned}$$

Zatem zmienna $X_t - X_s$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, |t-s|^{2H})$. Stąd

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^{\alpha} = c_{\alpha}|t-s|^{\alpha H}.$$

Twierdzenie 3.4 (zastowane z $\alpha > 1/H$ i $\beta = \alpha H - 1$) implikuje, że proces $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ma ciągłą modyfikację, ta modyfikacja to ułamkowy ruch Browna. □

Uwaga 4.17. Twierdzenie 3.4 implikuje, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie ułamkowego ruch Browna z parametrem H są lokalnie $H - \varepsilon$ hölderowskie dla każdego $\varepsilon > 0$.

Fakt 4.18. *Ułamkowy ruch Browna*
i) ma stacjonarne przyrosty, tzn. zmienna $X_t - X_s$ ma ten sam rozkład co $X_{t+h} - X_{s+h}$,
ii) jest samopodobny z wykładnikiem H, tzn (X_{at}) ma ten sam rozkład co $(|a|^H X_t)$ dla $a \in \mathbb{R}$.

Dowód. i) Dowód twierdzenia 4.16 pokazuje, że $X_t - X_s$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, |t-s|^{2H})$.

ii) Procesy (X_{at}) oraz $(|a|^H X_t)$ są gaussowskie, mają średnią zero i funkcję kowariancji równą $|a|^{2H} K_H(s,t)$. □

Uwaga 4.19. Nietrudno wykazać, że jeśli całkowalny z kwadratem proces $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ma stacjonarne przyrosty i jest H-samopodobny dla pewnego $H \neq 0$, to $H \in (0,1]$ oraz X ma funkcję kowariancji równą $C(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |s-t|^{2H})$ dla pewnego $C \geqslant 0$.

5 Filtracje z czasem ciągłym, Momenty Zatrzymania

Celem tej części jest pokazanie jak zmodyfikować definicje omawiane podczas kursowego wykładu z rachunku prawdopodobieństwa z przypadku czasu dyskretnego na czas ciągły.

Będziemy zakładać, że T jest lewostronnie domkniętym przedziałem (typowo $T = [0,\infty)$), choć większość definicji i wyników można uogólnić na szerszą klasę zbiorów.

5.1 Filtracje

Definicja 5.1. *Filtracją* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazywamy rosnący rodzinę σ-ciał zawartych w $\mathcal{F}$, tzn. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ dla $t \leqslant s,\ t,s \in T$.

Zdarzenia z σ-ciała $\mathcal{F}_t$ możemy interpretować jako zdarzenia obserwowalne do chwili t.

Definicja 5.2. Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ będzie procesem stochastycznym. *Filtracją generowaną przez* X nazywamy rodzinę $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in T}$ daną wzorem $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s \colon s \leqslant t)$.

Fakt 5.3. *Proces X_t ma przyrosty niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $s < t$, $s, t \in T$ przyrost $X_t - X_s$ jest niezależny od σ-ciała $\mathcal{F}_s^X$.*

Dowód. $\Rightarrow$: Rodzina zdarzeń A niezależnych od $X_t - X_s$ tworzy λ-układ, ponadto, z niezależności przyrostów X, zawiera π-układ zdarzeń postaci $\{X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n\}$ dla $t_1 < \ldots < t_n \leqslant s$ (bo $\sigma(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) = \sigma(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$.

$\Leftarrow$: Ustalmy $t_1 < \ldots < t_n$ oraz zbiory borelowskie $A_1, \ldots, A_n$. Zdarzenie $\{X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2, \ldots, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} \in A_{n-1}\}$ należy do σ-ciała $\mathcal{F}_{t_{n-1}}^X$, więc jest niezależne od zmiennej $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$. Stąd

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n)\\ &\quad= \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} \in A_{n-1})\mathbb{P}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n).\end{aligned}$$

Iterując to rozumowanie pokazujemy, że

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{t_1} \in& A_1, X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n)\\ &= \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1)\mathbb{P}(X_{t_2} - X_{t_1} \in A_2,) \cdots \mathbb{P}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in A_n).\end{aligned}$$ □

Definicja 5.4. Proces $X = (X_t)$ nazywamy *zgodnym z filtracją* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ lub *$\mathcal{F}_t$-adaptowalnym*, jeśli dla wszystkich $t \in T$, X_t jest $\mathcal{F}_t$ mierzalne.

Uwaga 5.5. Oczywiście proces X jest zgodny z filtracją $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ dla $t \in T$. W szczególności każdy proces X jest zgodny z filtracją przez siebie generowaną.

5.2 Momenty Zatrzymania

Definicja 5.6. *Momentem zatrzymania (momentem Markowa, czasem zatrzymania)* względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ nazywamy zmienną losową o wartościach w $T \cup \{\infty\}$ taką, że $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t \in T$.

Moment zatrzymania to strategia przerwania eksperymentu losowego (np. zakończenia udziału w pewnej grze losowej) taka, że decyzję o przerwaniu do chwili t podejmujemy tylko na podstawie obserwacji dostępnych w tym czasie.

Przykład. Dla zbioru $A \subset \mathbb{R}$ i procesu stochastycznego $(X_t)_{t\in T}$ określmy

$$\tau_A = \inf\{t \in T \colon X_t \in A\}.$$

Jeśli $(X_t)_{t\in T}$ jest $\mathcal{F}_t$-adaptowalnym procesem o ciągłych trajektoriach, zaś A zbiorem domkniętym, to τ_A jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$.

Dowód. Niech $T_0 \subset T$ będzie gęstym podzbiorem T zawierającym lewy koniec. Z domknię-tości zbioru A i ciągłości X dostajemy dla $t \in T$

$$\{\tau_A \leqslant t\} = \{\exists_{s \leqslant t}\ X_s \in A\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \leqslant t, s \in T_0} \{X_s \in A_{1/n}\} \in \mathcal{F}_t,$$

gdzie

$$A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \colon d(x, A) < \varepsilon\} \qquad (\varepsilon\text{-otoczka zbioru } A).$$ □

Uwaga 5.7. Jeśli w powyższym przykładzie A będzie zbiorem otwartym, to τ_A nie musi być momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, ale musi być momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_{t+})_{t \in T}$, gdzie dla $t < \sup T$

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s,$$

a jeśli t jest największym elementem T, to kładziemy $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$.

Powyższa uwaga motywuje poniższą definicję, która ma nieco techniczny charakter, ale jest powszechnie używana w teorii procesów.

Definicja 5.8. Filtrację $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ nazywamy *prawostronnie ciągłą*, jeśli $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ dla wszystkich $t \in T$. Mówimy, że filtracja $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ *spełnia zwykłe warunki*, jeśli
a) jest prawostronnie ciągła,
b) dla wszystkich t, $\mathcal{F}_t$ zawiera wszystkie zbiory miary zero, tzn. jeśli $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = 0$, to $A \in \mathcal{F}_t$.

Definicja 5.9. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. Definiujemy σ-ciało *zdarzeń obserwowalnych do chwili* τ wzorem

$$\mathcal{F}_\tau := \Big\{A \in \mathcal{F}_\infty := \sigma\Big(\bigcup_{t \in T} \mathcal{F}_t\Big) \colon \forall_{t \in T}\ A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\Big\}.$$

Fakt 5.10. *a) Zbiór $\mathcal{F}_\tau$ jest σ-ciałem.*
b) Jeśli $\tau \leqslant \sigma$, to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.
c) Zmienna losowa τ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalna.

Dowód. a) Zbiór $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$, bo $\Omega \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$. Jeśli $A \in \mathcal{F}_\tau$, to $A' \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant t\} \setminus (A \cap \{\tau \leqslant t\}) \in \mathcal{F}_t$, czyli $A' \in \mathcal{F}_\tau$. Jeśli $A_n \in \mathcal{F}_\tau$ dla $n = 1, 2 \ldots$, to $(\bigcup_n A_n) \cap \{\tau \leqslant t\} = \bigcup_n (A_n \cap \{\tau \leqslant t\}) \in \mathcal{F}_t$, czyli $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}_\tau$.

b) Weźmy $A \in \mathcal{F}_\tau$, wówczas dla $t \in T$, $A \cap \{\sigma \leqslant t\} = A \cap \{\tau \leqslant t\} \cap \{\sigma \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$, czyli $A \in \mathcal{F}_\sigma$.

c) Wystarczy pokazać, że $\{\tau \leqslant s\} \in \mathcal{F}_\tau$, ale $\{\tau \leqslant s\} \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant s \wedge t\} \in \mathcal{F}_{s \wedge t} \subset \mathcal{F}_t$. □

Kolejny prosty fakt pozostawiamy do udowodnienia na ćwiczeniach.

Fakt 5.11. *Załóżmy, że τ i σ są momentami zatrzymania. Wówczas $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$ oraz zdarzenia $\{\tau < \sigma\}, \{\sigma < \tau\}, \{\tau \leqslant \sigma\}, \{\sigma \leqslant \tau\}, \{\tau = \sigma\}$ należą do $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}$.*

Okazuje się, że (inaczej niż w przypadku czasu dyskretnego) adaptowalność procesu nie gwarantuje np. mierzalności zmiennych X_τ dla wszystkich momentów zatrzymania τ. Dlatego wprowadzimy jeszcze jedną techniczną definicję.

Definicja 5.12. Proces $X = (X_t)_{t\in T}$ nazywamy *progresywnie mierzalnym* względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, jeśli dla każdego $t \in T$, funkcja $(s,\omega) \to X_s(\omega)$ traktowana jako funkcja ze zbioru $T \cap (-\infty, t] \times \Omega$ w $\mathbb{R}$ jest mierzalna względem σ-algebry $\mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t$. Równoważnie

$$\forall_{t\in T}\ \forall_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}\ \{(s,\omega) \in T \times \Omega \colon s \leqslant t, X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t.$$

Fakt 5.13. *Załóżmy, że T jest przedziałem oraz dany jest proces $X = (X_t)_{t\in T}$ i filtracja $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.*
a) Jeśli proces X jest progresywnie mierzalny względem $(\mathcal{F}_t)$, to jest $\mathcal{F}_t$-adaptowalny.
b) Jeśli proces X jest $\mathcal{F}_t$-adaptowalny oraz ma prawostronnie ciągłe trajektorie, to jest progresywnie mierzalny względem $(\mathcal{F}_t)$.

Dowód. a) Zbiór $\{\omega \colon X_t(\omega) \in A\}$ jest przekrojem zbioru $\{(s,\omega) \in T \times \Omega \colon s \leqslant t, X_s(\omega) \in A\}$, a zatem należy do $\mathcal{F}_t$.

b) Ustalmy $t \in T$ i połóżmy dla $s \in T$, $s \leqslant t$, $X_s^{(n)} := X_{t-2^{-n}k}$, gdzie k jest liczbą całkowitą taką, że $t - 2^{-n}(k+1) < s \leqslant t - 2^{-n}k$. Wówczas

$$\begin{aligned}\{(s,\omega) \in{}& T \times \Omega \colon s \leqslant t, X_s^{(n)}(\omega) \in A\}\\ &= \bigcup_{k=0}^{\infty} \Big(T \cap \Big(t - \frac{k+1}{2^n}, t - \frac{k}{2^n}\Big]\Big) \times \{\omega \colon X_{t-\frac{k}{2^n}}(\omega) \in A\}\\ &\in \mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

Zatem funkcja $X_s^{(n)}(\omega), s \in T \cap (-\infty, t], \omega \in \Omega$ jest $\mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ mierzalna. Wobec prawostronnej ciągłości X mamy $X_s(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega)$, zatem funkcja $X_s(\omega), s \in T \cap (-\infty, t], \omega \in \Omega$ jest $\mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ mierzalna jako granica funkcji mierzalnych. $\square$

Jeśli τ jest momentem zatrzymania, a $X = (X_t)_{t\in T}$ procesem, to zmienna X_τ jest dobrze zdefiniowana tylko na zbiorze $\{\tau < \infty\}$. Musimy zatem określić co mamy na myśli mówiąc, że zmienna X_τ jest mierzalna.

Definicja 5.14. Mówimy, że zmienna losowa Z określona na zbiorze A jest mierzalna względem σ-ciała $\mathcal{G}$ zawierającego A, jeśli $\{\omega \in A \colon Z(\omega) \in B\} \in \mathcal{G}$ dla dowolnego zbioru borelowskiego B.

Fakt 5.15. *Załóżmy, że $X = (X_t)_{t\in T}$ jest procesem progresywnie mierzalnym względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, a τ jest momentem zatrzymania. Wówczas zmienna losowa X_τ określona na zbiorze $\{\tau < \infty\} \in \mathcal{F}_\tau$ jest $\mathcal{F}_\tau$ mierzalna. Ponadto proces zatrzymany w chwili τ, $X^\tau := (X_{t\wedge\tau})_{t\in T}$ jest progresywnie mierzalny.*

Dowód. Odwzorowanie

$$(s,\omega) \to (\tau(\omega)\wedge s, \omega)\colon T\cap(-\infty,t]\times\Omega \to T\cap(-\infty,t]\times\Omega$$

jest mierzalne względem σ-ciała $\mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t)$. Jeśli złożymy je z odwzorowaniem

$$(s,\omega)\to X_s(\omega) \text{ mierzalnym z } (T\cap(-\infty,t]\times\Omega, \mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t) \text{ w } \mathbb{R},$$

to otrzymamy odwzorowanie

$$(s,\omega)\to X_{\tau(\omega)\wedge s}(\omega) \text{ mierzalne z } (T\cap(-\infty,t]\times\Omega, \mathcal{B}(T\cap(-\infty,t])\otimes\mathcal{F}_t) \text{ w } \mathbb{R}.$$

Stąd wynika progresywna mierzalność procesu X^τ. By zakończyć dowód zauważmy, że

$$\{X_\tau\in A\}\cap\{\tau\leqslant t\} = \{X_{\tau\wedge t}\in A\}\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t$$

na mocy progresywnej mierzalności (a właściwie adaptowalności) X^τ. □

6 Martyngały z czasem ciągłym

6.1 Definicje i przykłady

Definicja 6.1. Mówimy, że $(X_t)_{t\in T}$ jest *martyngałem* (odp. *podmartyngałem, nadmartyngałem) względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ lub, że $(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest *martyngałem* (odp. *podmartyngałem, nadmartyngałem*), jeśli
a) dla wszystkich $t\in T$, X_t jest $\mathcal{F}_t$ adaptowalny i $\mathbb{E}|X_t| < \infty$,
b) dla dowolnych $s,t\in T, s<t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ p.n. (odp. $\geqslant$ dla podmartyngału i $\leqslant$ dla nadmartyngału).

Przykład 1. Jeśli X jest całkowalną zmienną losową, a $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ dowolną filtracją, to $X_t := \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$, $t\in T$ jest martyngałem względem $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.
Istotnie, całkowalność i mierzalność wynikają z definicji wwo. Ponadto dla $t>s$,

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_s) = X \text{ p.n..}$$

Przykład 2. $(W_t)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s\colon s\leqslant t)$.
Całkowalność i mierzalność są oczywiste. Ponadto, dla $t>s$ mamy z niezależności przyrostów

$$\mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = W_s + \mathbb{E}(W_t - W_s) = W_s \text{ p.n..}$$

Przykład 3. $(W_t^2)_{t\geqslant 0}$ jest podmartyngałem, a $(W_t^2-t)_{t\geqslant 0}$ martyngałem względem naturalnej filtracji $\mathcal{F}_t^W=\sigma(W_s\colon s\leqslant t)$.
Całkowalność i mierzalność są jasne. Ponadto, dla $t>s$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t^2|\mathcal{F}_s)&=\mathbb{E}(W_s^2|\mathcal{F}_s)+\mathbb{E}(2W_s(W_t-W_s)|\mathcal{F}_s)+\mathbb{E}((W_t-W_s)^2|\mathcal{F}_s)\\&=W_s^2+2W_s\mathbb{E}(W_t-W_s)+\mathbb{E}(W_t-W_s)^2=W_s^2+t-s\ \text{ p.n..}\end{aligned}$$

Uwaga 6.2. W ostatnich dwu przykładach filtrację $(\mathcal{F}_t^W)$ można zastąpić filtracją $(\mathcal{F}_{t+}^W)$.

Fakt 6.3. *Załóżmy, że $(X_t,\mathcal{F}_t)$ jest martyngałem (odp. podmartyngałem), zaś $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcją wypukłą (odp. wypukłą i niemalejącą) taką, że $\mathbb{E}|f(X_t)|<\infty$ dla wszystkich t. Wówczas $(f(X_t),\mathcal{F}_t)$ jest podmartyngałem.*

Dowód. Z nierówności Jensena mamy $\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s)\geqslant f(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s))$ p.n., a ostatnia zmienna jest równa $f(X_s)$ w przypadku martyngału i nie mniejsza niż $f(X_s)$ dla podmartyngału. □

6.2 Jednostajna całkowalność

By przenieść twierdzenia martyngałowe z przypadku dyskretnego na przypadek ciągły, wykorzystuje się często metodę aproksymacyjną. Dla uzasadnienia przejścia do granicy potrzebne są dodatkowe założenia o procesie (najczęściej wystarczy prawostronna ciągłość) oraz pewne narzędzia analityczne. Jednym z bardzo uzytecznych pojęć jest jednostajna całkowalność – przypomnimy teraz jej definicje, omówimy podstawowe przykłady i własności.

Definicja 6.4. Rodzinę zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$ nazywamy *jednostajnie całkowalną*, jeśli

$$\lim_{C\to\infty}\sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}}=0.$$

Fakt 6.5. *Rodzina zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki*
a) $\sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i|<\infty$,
b) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\ \mathbb{P}(A)\leqslant\delta\Rightarrow\sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_A\leqslant\varepsilon$.

Dowód. $\Rightarrow$: Ustalmy $\varepsilon>0$ i dobierzmy C takie, że $\sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}}\leqslant\varepsilon/2$. Wówczas

$$\forall_{i\in I}\ \mathbb{E}|X_i|\leqslant C+\mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}}\leqslant C+\varepsilon/2<\infty$$

oraz, jeśli $\mathbb{P}(A)<\delta:=\frac{\varepsilon}{2C}$, to

$$\mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_A\leqslant C\mathbb{P}(A)+\mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}}\leqslant C\delta+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

$\Leftarrow$: Niech $M:=\sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i|$ oraz $\delta>0$ będzie takie, że $\sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_A\leqslant\varepsilon$ dla $\mathbb{P}(A)\leqslant\delta$. Wówczas, jeśli $C=M/\delta$, to $\mathbb{P}(|X_i|>C)<M/C=\delta$ dla dowolnego $i\in I$, czyli $\sup_{i\in I}\mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}}\leqslant\varepsilon$. □

Przykłady rodzin jednostajnie całkowalnych

1. Rodzina jednoelementowa $\{Y\}$ taka, że $\mathbb{E}|Y| < \infty$.

Istotnie $\lim_{C\to\infty} \mathbb{E}|Y|\mathrm{I}_{\{|Y|>C\}} = 0$.

2. Rodzina wspólnie ograniczona przez zmienną całkowalną tzn. rodzina $(X_i)_{i\in I}$ taka, że $\forall_{i\in I}|X_i| \leqslant Y$ oraz $\mathbb{E}Y < \infty$.

Wynika to z Faktu 6.5, poprzedniego przykładu i oczywistej obserwację $\mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_A \leqslant \mathbb{E}|Y|\mathrm{I}_A$.

3. Rodzina uśrednień ustalonej całkowalnej zmiennej losowej, tzn. rodzina postaci $(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_i))_{i\in I}$, gdzie $\mathbb{E}|X| < \infty$, zaś $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ dowolna rodzina σ-podciał $\mathcal{F}$.

Na podstawie nierówności Jensena $\mathbb{E}|X_i| = \mathbb{E}|\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_i)| \leqslant \mathbb{E}|X|$, a zatem

$$\mathbb{P}(|X_i| \geqslant C) \leqslant \frac{\mathbb{E}|X_i|}{C} \leqslant \frac{\mathbb{E}|X|}{C} \leqslant \delta \text{ dla } C \geqslant \frac{\delta}{\mathbb{E}|X|}.$$

Zbiór $\{|X_i| > C\} \in \mathcal{F}_i$, więc z nierówności Jensena

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_i|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}} &= \mathbb{E}|\mathbb{E}(X\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}}|\mathcal{F}_i)| \leqslant \mathbb{E}\mathbb{E}(|X|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}}|\mathcal{F}_i)\\ &\leqslant \mathbb{E}(|X|\mathrm{I}_{\{|X_i|>C\}}) \leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

jeśli tylko dobierzemy odpowiednio małe δ korzystając z jednostajnej całkowalności $\{|X|\}$.

Fakt 6.6. *Załóżmy, że $1 \leqslant p < \infty$, a X_n są zmiennymi losowymi takimi, że rodzina $(|X_n|^p)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie całkowalna. Wówczas X_n zbiega do zmiennej X w L_p wtedy i tylko wtedy, gdy X_n zbiega do X według prawdopodobieństwa.*

Dowód. Wystarczy udowodnić, że zbieżność X_n według prawdopodobieństwa implikuje zbieżność w L_p, bo przeciwna implikacja jest zawsze prawdziwa. Załóżmy więc, że $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, wówczas dla pewnego podciągu n_k, X_{n_k} zbiega do X p.n., stąd na mocy Lematu Fatou

$$\mathbb{E}|X|^p = \mathbb{E}\lim|X_{n_k}|^p \leqslant \liminf \mathbb{E}|X_{n_k}|^p \leqslant \sup_n \mathbb{E}|X_n|^p < \infty.$$

Zatem rodzina $\{|X_n|^p : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{|X|^p\}$ jest jednostajnie całkowalna. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta > 0$ tak by dla $\mathbb{P}(A) < \delta$ zachodziło $\mathbb{E}|X_n|^p\mathrm{I}_A \leqslant \varepsilon$ oraz $\mathbb{E}|X|^p\mathrm{I}_A \leqslant \varepsilon$. Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_n - X|^p &\leqslant \varepsilon^p + \mathbb{E}|X_n - X|^p\mathrm{I}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}}\\ &\leqslant \varepsilon^p + 2^p\mathbb{E}|X_n|^p\mathrm{I}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}} + 2^p\mathbb{E}|X|^p\mathrm{I}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}},\end{aligned}$$

a ponieważ $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, więc $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \delta$ dla dużych n, czyli

$$\mathbb{E}|X_n - X|^p \leqslant \varepsilon^p + 2^{p+1}\varepsilon \text{ dla dostatecznie dużych } n.$$

$\square$

Wniosek 6.7. *Jeśli rodzina* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest jednostajnie całkowalna oraz* X_n *zbiega prawie na pewno do zmiennej* X*, to* $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}X_n\mathrm{I}_A = \mathbb{E}X\mathrm{I}_A$ *dla wszystkich zdarzeń* A*.*

Dowód. Stosujemy Fakt 6.6 i oczywiste szacowanie $|\mathbb{E}X_n\mathrm{I}_A - \mathbb{E}X\mathrm{I}_A| \leqslant \mathbb{E}|X_n - X|$. □

6.3 Twierdzenia Dooba o stopowaniu

Zacznijmy od przypomnienia lematu Dooba o stopowaniu martyngałów z czasem dyskretnym.

Lemat 6.8. *Załóżmy, że* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ *jest martyngałem (odp. nad-, pod-), zaś* $0 \leqslant \tau \leqslant \sigma \leqslant N$ *dwoma momentami zatrzymania. Wówczas*

$$\mathbb{E}(X_\sigma|\mathcal{F}_\tau) = X_\tau \quad \textit{p.n. (odp. } \leqslant, \geqslant\textit{).}$$

Dowód. Pokażemy dowód dla martyngałów. Musimy pokazać, że dla $A \in \mathcal{F}_\tau$, $\mathbb{E}X_\tau\mathbb{1}_A = \mathbb{E}X_\sigma\mathbb{1}_A$. Połóżmy $A_k := A \cap \{\tau = k\}$ dla $k = 0, 1, \ldots, N$. Mamy

$$(X_\sigma - X_\tau)\mathbb{1}_{A_k} = (X_\sigma - X_k)\mathbb{1}_{A_k} = \sum_{i=k}^{\sigma-1}(X_{i+1} - X_i)\mathbb{1}_{A_k} = \sum_{i=k}^{N}(X_{i+1} - X_i)\mathbb{1}_{A_k\cap\{\sigma>i\}},$$

zatem

$$\mathbb{E}[(X_\sigma - X_\tau)\mathbb{1}_{A_k}] = \sum_{i=k}^{N}\mathbb{E}[(X_{i+1} - X_i)\mathbb{1}_{A_k\cap\{\sigma>i\}}] = 0,$$

gdyż $A_k \cap \{\sigma > i\} \in \mathcal{F}_i$. Stąd

$$\mathbb{E}[(X_\sigma - X_\tau)\mathbb{1}_A] = \sum_{k=0}^{N}\mathbb{E}[(X_\sigma - X_\tau)\mathbb{1}_{A_k}] = 0.$$

Dla nadmartyngałów (podmartyngałów) trzeba niektóre równości zastąpić nierównościami, szczegóły pozostawiamy jako proste ćwiczenie. □

Uwaga 6.9. Lemat 6.8 nie jest prawdziwy, jeśli nie założymy ograniczoności momentów zatrzymania, np. biorąc $X_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_n$, gdzie ε_n niezależne zmienne losowe takie, że $\mathbb{P}(\varepsilon_n = \pm1) = 1/2$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\tau = 0$, $\sigma = \inf\{n\colon X_n = 1\}$ widzimy, że $\mathbb{E}X_\tau = 0 \neq 1 = \mathbb{E}X_\sigma$.

Sformułujemy teraz ciągłą wersję Lematu 6.8.

Twierdzenie 6.10. *a) Załóżmy, że* T *jest przedziałem,* $(X_t)_{t\in T}$ *jest prawostronnie ciągłym martyngałem, zaś* σ *i* τ *są czasami zatrzymania takimi, że* $\sigma \leqslant \tau \leqslant t_{\max}$ *oraz* $t_{\max} \in T$*. Wówczas* $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ *p.n..*
b) Jeśli $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant\infty}$ *jest prawostronnie ciągłym martyngałem z ostatnim elementem* X_∞ *to dla dowolnych dwu czasów zatrzymania* $\sigma \leqslant \tau$, $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ *p.n.*

Dowód. Udowodnimy część a) (część b) można za pomocą zmiany czasu sprowadzić do a)). Zdefiniujmy

$$\tau_n(\omega) := \begin{cases} t_{\max} - \frac{k}{n} & \text{dla } \tau(\omega) \in (t_{\max} - \frac{k+1}{n}, t_{\max} - \frac{k}{n}],\ k = 0, 1, \ldots, n^2, \\ t_{\max} - n & \text{dla } \tau(\omega) \leqslant t_{\max} - n \end{cases}$$

oraz

$$\sigma_n(\omega) := \begin{cases} t_{\max} - \frac{k}{n} & \text{dla } \sigma(\omega) \in (t_{\max} - \frac{k+1}{n}, t_{\max} - \frac{k}{n}],\ k = 0, 1, \ldots, n^2, \\ t_{\max} - n & \text{dla } \sigma(\omega) \leqslant t_{\max} - n. \end{cases}$$

Wówczas $\sigma_n \leqslant \tau_n \leqslant t_{\max}$ są ograniczonymi czasami zatrzymania przyjmującymi jedynie skończenie wiele wartości. Zatem na mocy Lematu 6.8 mamy $\mathbb{E}(X_{\tau_n}|\mathcal{F}_{\sigma_n}) = X_{\sigma_n}$ p.n., $\mathbb{E}(X_{t_{\max}}|\mathcal{F}_{\sigma_n}) = X_{\sigma_n}$ p.n. oraz $\mathbb{E}(X_{t_{\max}}|\mathcal{F}_{\tau_n}) = X_{\tau_n}$ p.n., w szczególności więc rodziny $(X_{\tau_n})_{n=1}^{\infty}$ oraz $(X_{\sigma_n})_{n=1}^{\infty}$ są jednostajnie całkowalne. Ponieważ $\tau_n \to \tau+$ oraz $\sigma_n \to \sigma+$, więc z prawostronnej ciągłości X oraz Faktu 6.6 $X_{\tau_n} \to X_\tau$, $X_{\sigma_n} \to X_\sigma$ p.n. i w L_1. Weźmy $A \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$, wówczas

$$\mathbb{E}X_\tau \mathrm{I}_A = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{\tau_n}\mathrm{I}_A = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{\sigma_n}\mathrm{I}_A = \mathbb{E}X_\sigma \mathrm{I}_A,$$

co oznacza, że $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ p.n.. □

Uwaga 6.11. Niewielka modyfikacja dowodu pokazuje, że jeśli $(X_t)_{t\in T}$ jest prawostronnie ciągłym nieujemnym podmartyngałem, zaś σ i τ są czasami zatrzymania takimi, że $\sigma \leqslant \tau \leqslant t_{\max}$ oraz $t_{\max} \in T$, to $\mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \geqslant X_\sigma$ p.n.. Nieujemność jest tu potrzebna po to, by z warunków $\mathbb{E}(X_{t_{\max}}|\mathcal{F}_{\sigma_n}) \geqslant X_{\sigma_n}$ p.n. oraz $\mathbb{E}(X_{t_{\max}}|\mathcal{F}_{\tau_n}) \geqslant X_{\tau_n}$ wywnioskować jednostajną całkowalność $(X_{\tau_n})_{n=1}^{\infty}$ oraz $(X_{\sigma_n})_{n=1}^{\infty}$.

Literatura

[1] P. Billingsley *Prawdopodobieństwo i miara*, wyd. II, PWN, Warszawa 2009.

[2] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, wyd. IV, Script, Warszawa 2010.

[3] I. Karatzas, S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York 1997.

[4] R. Latała, *Wstęp do Analizy Stochastycznej*, Uniwersytet Warszawski, 2011, https://mst.mimuw.edu.pl/wyklady/was/wyklad.pdf.

[5] D. Revuz, M. Yor, *Continous martingales and Brownian Motion*, 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin 1999

[6] A. Talarczyk-Noble, *Wstęp do Procesów Stochastycznych (2022/23).*

[7] A. D. Wentzell, *Wykłady z teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1980.