Kolokwium ze Wstępu do Analizy Stochastycznej
gr.I, 25 kwietnia 2014

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać pełne rozwiązanie każdego z nich na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i numerem grupy (grupa I). Każde z zadań będzie oceniane w skali 0-10, poza podpunktem iii) zadania 2 za który można dostać dodatkowe 5 punktów. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Scentrowany proces gaussowski $(X_t)_{t\geqslant 0}$ ma niezależne przyrosty, ponadto $\mathbb{E}X_t^2 = e^{3t}$.
   i) Wykaż, że istnieje modyfikacja Y procesu X o ciągłych trajektoriach.
   ii) Znajdź funkcję f taką, że $Y_{f(t)} - Y_0$ jest procesem Wienera.

2. i) Znajdź funkcję g na $[0, \infty)$ taką, że $M_t = \exp(\int_0^t s^5 \, \mathrm{d}W_s - g(t))$, $t \geqslant 0$ jest martyngałem.
   ii) Czy M jest zbieżny przy prawie na pewno?
   iii*) Czy M jest zbieżny w L^1?

3. Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ ma prawostronnie ciągłe trajektorie, $X_0 = 0$ oraz dla każdego $t > s$, $X_t - X_s$ ma rozkład Poissona (z parametrem zależnym od t i s). Wykaż, że proces X_t ma z prawdopodobieństwem 1 trajektorie monotoniczne przyjmujące tylko wartości całkowite.

4. Niech $M_t := \int_0^t \sqrt{2W_s^2 + 3}\, \mathrm{d}W_s$, $0 \leqslant t < \infty$. Wykaż, że M jest martyngałem o ciągłych trajektoriach. Znajdź wartość średnią i kowariancję M.

5. Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ proces
   $$X_t = \frac{W_t}{\sqrt{t}(\ln\ln(t+10))^{\alpha}}$$
   jest zbieżny do zera przy $t \to \infty$
   i) wg prawdopodobieństwa,
   ii) w L^1,
   iii) prawie na pewno?

6. Dla $a \geqslant 0$ określmy
   $$\tau_a := \inf\{t \geqslant 0\colon |W_t| = \sqrt{at+5}\}.$$
   i) Wykaż, że $\tau_a < \infty$ p.n.
   ii) Oblicz $\mathbb{E}\tau_a$.

Kolokwium ze Wstępu do Analizy Stochastycznej

gr.II, 25 kwietnia 2014

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać pełne rozwiązanie każdego z nich na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i numerem grupy (grupa II). Każde z zadań będzie oceniane w skali 0-10, poza podpunktem iii) zadania 2 za który można dostać dodatkowe 5 punktów. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Scentrowany proces gaussowski $(X_t)_{t\geqslant 0}$ ma niezależne przyrosty, ponadto $\mathbb{E}X_t^2 = e^{5t}$.
   i) Wykaż, że istnieje modyfikacja Y procesu X o ciągłych trajektoriach.
   ii) Znajdź funkcję f taką, że $Y_{f(t)} - Y_0$ jest procesem Wienera.

2. i) Znajdź funkcję g na $[0,\infty)$ taką, że $M_t = \exp(\int_0^t s^4 \,\mathrm{d}W_s - g(t))$, $t \geqslant 0$ jest martyngałem.
   ii) Czy M jest zbieżny prawie na pewno?
   iii*) Czy M jest zbieżny w L^1?

3. Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ ma prawostronnie ciągłe trajektorie, $X_0 = 0$ oraz dla każdego $t > s$, $X_t - X_s$ ma rozkład Poissona (z parametrem zależnym od t i s). Wykaż, że proces X_t ma z prawdopodobieństwem 1 trajektorie monotoniczne przyjmujące tylko wartości całkowite.

4. Niech $M_t := \int_0^t \sqrt{3W_s^2 + 2}\,\mathrm{d}W_s$, $0 \leqslant t < \infty$. Wykaż, że M jest martyngałem o ciągłych trajektoriach. Znajdź wartość średnią i kowariancję M.

5. Dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ proces
   $$X_t = \frac{W_t}{\sqrt{t}(\ln\ln(t+10))^{\alpha}}$$
   jest zbieżny do zera przy $t \to \infty$
   i) wg prawdopodobieństwa,
   ii) w L^1,
   iii) prawie na pewno?

6. Dla $a \geqslant 0$ określmy
   $$\tau_a := \inf\{t \geqslant 0 \colon |W_t| = \sqrt{at+7}\}.$$
   i) Wykaż, że $\tau_a < \infty$ p.n.
   ii) Oblicz $\mathbb{E}\tau_a$.