Kartkówka 1
gr.I, 4 marca 2002

1. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera
   a) Oblicz $\mathbf{P}(W_{t_1} \geqslant W_{t_2} \geqslant \ldots \geqslant W_{t_n})$ dla $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.
   b*) Wykaż, że prawie wszystkie trajektorie ruchu Browna są niemonotoniczne na każdym przedziale tzn.
   $$\mathbf{P}(\exists_{0\leqslant a<b}\ t \to W_t \text{ monotoniczne na } [a,b]) = 0.$$
2. Rozpatrzmy następujące podzbiory $\mathbb{R}^{[0,1]}$
   $$A_1 = \{x : \sup\{|nx_{1/n}| : n = 1,2,\ldots\} < \infty\},$$
   $$A_2 = \{x : \sup\{|tx_t| : t \in [0,1]\} < \infty\}.$$
   Które ze zbiorów A_i należą do sigma ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]})$? Czy zbiory $A_i \cap C[0,1]$ należą do sigma ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]}) \cap C[0,1]$? Odpowiedź uzasadnij.

Kartkówka 1
gr.II, 4 marca 2002

1. Rozpatrzmy następujące podzbiory $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$
   $$A_1 = \{x : \sup\{|x_t| : t \in [0,\infty)\} < \infty\},$$
   $$A_2 = \{x : \sup\{|x_n| : n = 1,2,\ldots\} < \infty\}.$$
   Które ze zbiorów A_i należą do sigma ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$? Czy zbiory $A_i \cap C[0,1]$ należą do sigma ciała $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}) \cap C[0,1]$? Odpowiedź uzasadnij.
2. Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Wienera
   a) Oblicz $\mathbf{P}(W_{t_1} \leqslant W_{t_2} \leqslant \ldots \leqslant W_{t_n})$ dla $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.
   b*) Wykaż, że prawie wszystkie trajektorie ruchu Browna są niemonotoniczne na każdym przedziale tzn.
   $$\mathbf{P}(\exists_{0\leqslant a<b}\ t \to W_t \text{ monotoniczne na } [a,b]) = 0.$$