Kartkówka 3
gr.I, 7 kwietnia 2003

1. $(X_t)_{t\in[0,1]}$ jest scentrowanym procesem o przyrostach niezależnych i funkcji kowariancji $K(t,s)$. Znajdź funkcje $f(t)$ taką, że $(3X_t^2 + 2X_t - f(t), \mathcal{F}^X_{\leqslant t})_{t\in[0,1]}$ jest martyngałem.

2. Zmienne $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.
a) Które ze zmiennych $(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \vee \sigma_3, \sigma_1 + 2, (\sigma_1 \vee 2) - 1, \sigma_1^3$ muszą być momentami zatrzymania?
b)* Wykaż, że zmienna $\sigma_1 + \sigma_2$ jest momentem zatrzymania względem danej filtracji.

Kartkówka 3
gr.II, 7 kwietnia 2003

1. Zmienne $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ są momentami zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.
a) Które ze zmiennych $\max(\sigma_1, \sigma_2, \ldots), \sigma_1 + 3, \sigma_1 \vee (\sigma_2 - 1), \sigma_1^2 + 1$ muszą być momentami zatrzymania?
b)* Wykaż, że zmienna $\sigma_1 + \sigma_2$ jest momentem zatrzymania względem danej filtracji.

2. $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest scentrowanym procesem o przyrostach niezależnych i funkcji kowariancji $K(t,s)$. Znajdź funkcje $f(t)$ taką, że $(2X_t^2 + 5X_t + f(t), \mathcal{F}^X_{\leqslant t})_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem.

Kartkówka 3

gr.I, 8 kwietnia 2003

1. a) Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością 2. Znajdź taką funkcję $f(t)$, że $(e^{5N_t+f(t)}, \mathcal{F}_t^N)$ jest martyngałem.
   b)* Czy powyższy martyngał jest zbieżny p.n.? Czy jest zbieżny w L^1?

2. Niech W_t będzie procesem Wienera, N_t procesem Poissona z intensywnością 2, zaś α liczbą rzeczywistą. Znajdź

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|W_t|}{t^\alpha} \text{ i } \limsup_{t\to\infty} \frac{|N_t|}{t^\alpha}.$$

Kartkówka 3

gr.II, 8 kwietnia 2003

1. Niech W_t będzie procesem Wienera, N_t procesem Poissona z intensywnością 5, zaś α liczbą rzeczywistą. Znajdź

$$\limsup_{t\to\infty} t^\alpha |W_t| \text{ i } \limsup_{t\to\infty} t^\alpha |N_t|.$$

2. a) Niech N_t będzie procesem Poissona z intensywnością 5. Znajdź taką funkcję $f(t)$, że $(e^{2N_t-f(t)}, \mathcal{F}_t^N)$ jest martyngałem.
   b)* Czy powyższy martyngał jest zbieżny p.n.? Czy jest zbieżny w L^1?