Kartkówka 3

gr I, 18 grudnia 2006

1. Znajdź funkcje b i σ takie, że proces $X_t := \mathrm{tg}(2W_t + 3t)$ spełnia stochastyczne równanie różniczkowe
$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt.$$

2. Niech $W_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)})$ będzie trójwymiarowym procesem Wienera oraz
$$Y_t := \int_0^t \sin(W_s^{(1)})dW_s^{(2)} + \int_0^t \cos(W_s^{(1)})dW_s^{(3)}.$$
Ile wynosi $\langle Y \rangle$? Co można powiedzieć o procesie Y?

3* Niech $X_t = X_0 + A_t + M_t$ będzie semimartyngałem ciągłym ($A \in \mathcal{V}^c, M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$). Wykaż, że
$$\sum_{i=1}^{n} |X_{\frac{ti}{n}} - X_{\frac{t(i-1)}{n}}|^2 \to \langle M \rangle_t$$
według prawdopodobieństwa przy $n \to \infty$.

Kartkówka 3

gr II, 18 grudnia 2006

1. Niech $W_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)})$ będzie trójwymiarowym procesem Wienera oraz
$$Y_t := \int_0^t \cos(W_s^{(3)})dW_s^{(1)} + \int_0^t \sin(W_s^{(3)})dW_s^{(2)}.$$
Ile wynosi $\langle Y \rangle$? Co można powiedzieć o procesie Y?

2. Znajdź funkcje b i σ takie, że proces $X_t := \mathrm{tg}(3W_t + 2t)$ spełnia stochastyczne równanie różniczkowe
$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt.$$

3* Niech $X_t = X_0 + A_t + M_t$ będzie semimartyngałem ciągłym ($A \in \mathcal{V}^c, M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^c$). Wykaż, że
$$\sum_{i=1}^{n} |X_{\frac{ti}{n}} - X_{\frac{t(i-1)}{n}}|^2 \to \langle M \rangle_t$$
według prawdopodobieństwa przy $n \to \infty$.