Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:........................

Egzamin ze Wstępu do Analizy Stochastycznej
grupa I, 25 stycznia 2012

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań proszę **wybrać pięć** *i pełne rozwiązanie każdego z nich napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i numerem grupy (grupa I).*

1. (8pkt) Niech $\tau_a = \inf\{t \geqslant 0\colon\ |W_t| = \sqrt{at+7}\}$.
   a) Wykaż, że $\tau_a < \infty$ p.n. dla $a \geqslant 0$.
   b) W zależności od parametru $a \geqslant 0$ oblicz $\mathbb{E}\tau_a$.

2. (8pkt) Proces M jest dany wzorem
$$M_t = \int_0^t \sqrt{W_s^2+2}dW_s.$$
   a) Jakie procesy należą do przestrzeni $\mathcal{L}_T^2(M)$ i $\Lambda_T^2(M)$?
   b) Niech $N_t = \int_0^t |W_s|dM_s$. Oblicz $\mathbb{E}N_t$ i $\mathrm{Cov}(N_t, N_s)$. (Uwaga: $\mathbb{E}W_1^4 = 3$).

3. (8pkt) a) Wykaż, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ stochastycznego równania różniczkowego
$$dX_t = \frac{1}{1+e^{4X_t}}dW_t + 10dt$$
   z warunkiem początkowym $X_0 = 1$.
   b) Znajdź funkcje b i σ takie, że proces $Y = e^{2X}$ spełnia równanie
$$dY_t = \sigma(Y_t)dW_t + b(Y_t)dt.$$

4. (8pkt) Znajdź proces $(A_t)_{t\geqslant 0}$ o wahaniu ograniczonym na przedziałach ograniczonych taki, że $A_0 = 0$ oraz proces $M_t = \sin(t^2W_t) - A_t$ jest martyngałem lokalnym. Czy proces A jest wyznaczony jednoznacznie? Czy M jest martyngałem?

5. (8pkt) Wykaż, że ciąg zmiennych losowych
$$\sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{2}\Big(W_{k/n}^5 + W_{(k-1)/n}^5\Big)(W_{k/n} - W_{(k-1)/n})$$
   jest zbieżny według prawdopodobieństwa i znajdź jego granicę.

6. (8pkt) Proces (X, Y) jest rozwiązaniem dwuwymiarowego równania stochastycznego
$$\begin{cases} dX_t = \sin(X_t+Y_t)dW_t^1, \quad dY_t = \cos(X_t+Y_t)dW_t^2 \\ X_0 = Y_0 = 0, \end{cases}$$
   gdzie (W^1, W^2) oznacza dwuwymiarowy proces Wienera. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste a i b takie, że $aX_t + bY_t$ jest procesem Wienera.

Proszę obrócić stronę by zobaczyć część testową egzaminu

Część testowa

1. (4pkt) W zależności od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ wyznacz

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{t^\alpha} =$$

2. (2pkt) Podaj definicję martyngału lokalnego względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$

3. (2pkt) Podaj sformułowanie twierdzenia Kołmogorowa o istnieniu ciągłej modyfikacji procesu.

4. (3pkt) Proces $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ jest modyfikacją procesu $W_t^2 - t$. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi): X jest ciągły w L^2, X jest martyngałem, X jest procesem gaussowskim, X ma ciągłe trajektorie.

5. (4pkt) Proces $(W_t + 3\sqrt{t+1})_{0\leqslant t\leqslant 2}$ jest procesem Wienera względem miary probabilistycznej $\mathbb{Q}$ danej wzorem

$$\mathbb{Q}(A) =$$

6. (3pkt) Przedstaw poniższą całkę w postaci nie zawierającej całek stochastycznych

$$\int_0^t W_s^8 dW_s =$$

7. (3pkt) Proces $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$ jest ciągłym martyngałem. Podkreśl warunki, które implikują zbieżność M_t w L_1 przy $t\to\infty$: $\sup_{t\geqslant 0}\mathbb{E}M_t^2 < \infty$, $\sup_{t\geqslant 0}\mathbb{E}|M_t| < \infty$, $\mathbb{E}\sup_{t\geqslant 0}|M_t| < \infty$, zbieżność M_t według rozkładu przy $t\to\infty$.

8. (3pkt) Zmienna $\int_0^\infty e^{-2s} dW_s$ ma rozkład

9. (2pkt) Zmienne $aW_1 + 3W_2$ oraz $W_3 - bW_4$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

10. (2pkt) Podaj definicję sigma ciała $\mathcal{F}_\tau$

11. (2pkt) Sformułuj twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej dla całki stochastycznej.

Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:........................

Egzamin ze Wstępu do Analizy Stochastycznej
grupa II, 25 stycznia 2012

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań proszę **wybrać pięć** *i pełne rozwiązanie każdego z nich napisać na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i numerem grupy (grupa II).*

1. (8pkt) Niech $\tau_a = \inf\{t \geqslant 0\colon\ |W_t| = \sqrt{at+10}\}$.
   a) Wykaż, że $\tau_a < \infty$ p.n. dla $a \geqslant 0$.
   b) W zależności od parametru $a \geqslant 0$ oblicz $\mathbb{E}\tau_a$.

2. (8pkt) Proces M jest dany wzorem
$$M_t = \int_0^t \sqrt{2W_s^2+1}\,dW_s.$$
   a) Jakie procesy należą do przestrzeni $\mathcal{L}_T^2(M)$ i $\Lambda_T^2(M)$?
   b) Niech $N_t = \int_0^t |W_s|dM_s$. Oblicz $\mathbb{E}N_t$ i $\mathrm{Cov}(N_t, N_s)$. (Uwaga: $\mathbb{E}W_1^4 = 3$).

3. (8pkt) a) Wykaż, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ stochastycznego równania różniczkowego
$$dX_t = \frac{1}{1+e^{6X_t}}dW_t + 10dt$$
   z warunkiem początkowym $X_0 = 1$.
   b) Znajdź funkcje b i σ takie, że proces $Y = e^{3X}$ spełnia równanie
$$dY_t = \sigma(Y_t)dW_t + b(Y_t)dt.$$

4. (8pkt) Znajdź proces $(A_t)_{t\geqslant 0}$ o wahaniu ograniczonym na przedziałach ograniczonych taki, że $A_0 = 0$ oraz proces $M_t = \cos(t^2 W_t) - A_t$ jest martyngałem lokalnym. Czy proces A jest wyznaczony jednoznacznie? Czy M jest martyngałem?

5. (8pkt) Wykaż, że ciąg zmiennych losowych
$$\sum_{k=2n+1}^{4n} \frac{1}{2}\Big(W_{k/n}^6 + W_{(k-1)/n}^6\Big)(W_{k/n} - W_{(k-1)/n})$$
   jest zbieżny według prawdopodobieństwa i znajdź jego granicę.

6. (8pkt) Proces (X, Y) jest rozwiązaniem dwuwymiarowego równania stochastycznego
$$\begin{cases} dX_t = \cos(X_t - Y_t)dW_t^1, \quad dY_t = \sin(X_t - Y_t)dW_t^2 \\ X_0 = Y_0 = 0, \end{cases}$$
   gdzie (W^1, W^2) oznacza dwuwymiarowy proces Wienera. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste a i b takie, że $aX_t + bY_t$ jest procesem Wienera.

Proszę obrócić stronę by zobaczyć część testową egzaminu

Część testowa

1. (2pkt) Podaj sformułowanie twierdzenia Kołmogorowa o istnieniu ciągłej modyfikacji procesu.

2. (3pkt) Przedstaw poniższą całkę w postaci nie zawierającej całek stochastycznych

   $$\int_0^t W_s^5 dW_s =$$

3. (2pkt) Zmienne $aW_1 + 2W_3$ oraz $W_2 + bW_4$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

4. (3pkt) Proces $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$ jest ciągłym martyngałem. Podkreśl warunki, które implikują zbieżność M_t w L_1 przy $t \to \infty$: zbieżność M_t według rozkładu przy $t \to \infty$, $\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}|M_t| < \infty$, $\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}M_t^2 < \infty$, $\mathbb{E}\sup_{t\geqslant 0} |M_t| < \infty$.

5. (2pkt) Sformułuj twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej dla całki stochastycznej

6. (3pkt) Zmienna $\int_0^\infty e^{-4s} dW_s$ ma rozkład

7. (2pkt) Podaj definicję martyngału lokalnego względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$

8. (2pkt) Podaj definicję sigma ciała $\mathcal{F}_\tau$

9. (4pkt) Proces $(W_t + \sqrt{3t+2})_{0\leqslant t\leqslant 1}$ jest procesem Wienera względem miary probabilistycznej $\mathbb{Q}$ danej wzorem

   $$\mathbb{Q}(A) =$$

10. (4pkt) W zależności od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ wyznacz

    $$\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{t^\alpha} =$$

11. (3pkt) Proces $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ jest modyfikacją procesu $W_t^2 - t$. Wynika stąd, że (podkreśl właściwe odpowiedzi): X jest procesem gaussowskim, X jest martyngałem, X jest ciągły w L^2, X ma ciągłe trajektorie.