Imię i nazwisko:... Nr indeksu....................

Egzamin z Procesów Stochastycznych II
grupa I, 5 lutego 2007

Uwaga: W poniższych zadaniach $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ oznacza zawsze standardowy proces Wienera na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Część zadaniowa

Pełne rozwiązania poniższych 5 zadań należy napisać na osobnych kartkach. Można powoływać się na wszystkie twierdzenia i fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Każde zadanie jest warte 7 punktów. Podpunkty oznaczone gwiazdką będą oceniane osobno.

1. Rozpatrzmy równanie
$$dX_s = dW_s + 5\sin(3s)ds, \quad s \in [0,2]$$
z warunkiem początkowym $X_0 = 0$.
a) Czy to równanie ma dokładnie jedno (mocne) rozwiązanie?
b) Znajdź taką miarę probabilistyczną $\mathbb{Q}$, by proces X spełniający powyższe równanie był procesem Wienera na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.

2. Niech $M_t = \int_0^t e^{-2s} W_s dW_s$. Czy granica $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ istnieje? W jakim sensie mamy tu zbieżność? Oblicz $\mathbb{E}M_\infty$ i $\mathrm{Var}(M_\infty)$.

3. a) Czy ciąg $S_n := \sum_{k=1}^{3n} |\cos(W_{k/n}) - \cos(W_{(k-1)/n})|^2$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa? Jeśli tak, to ile wynosi jego granica?
b*) Czy ciąg S_n jest zbieżny w L^1?

4. Niech $X_t = \int_0^t 5^s dW_s$. Czy istnieje funkcja $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ taka, że $X_{g(t)}$ jest procesem Wienera?

5. a) Czy proces $X_t = W_t^5 + 4|W_t|$ jest semimartyngałem? Jeśli tak, to znajdź jego rozkład na martyngał lokalny i proces o trajektoriach o wahaniu ograniczonym na przedziałach skończonych.
b*) Czy $|W_t|^{1/2}$ jest semimartyngałem?

Część Testowa

1. (4pkt) Proces $X_t = W_t^5$ spełnia stochastyczne równanie różniczkowe $dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt$, $t \geqslant 0$ z warunkiem początkowym $X_0 = 0$ dla funkcji $\sigma(x) =$ .... oraz $b(x) =$ .... Równanie to posiada/nie posiada inne mocne rozwiązanie.

2. (4pkt) Dla $t \geqslant 0$ oblicz granice następujących zmiennych przy $n \to \infty$,
$$\sum_{k=1}^{n} W_{t(k-1)/n}^2 (W_{tk/n} - W_{t(k-1)/n}) \xrightarrow{\mathbb{P}}$$
$$\sum_{k=1}^{n} W_{tk/n}^2 (W_{tk/n} - W_{t(k-1)/n}) \xrightarrow{\mathbb{P}}$$

3. (4pkt) Niech $X_t = \int_0^t (1+2W_s)dW_s$. Oblicz $\mathbb{E}X_t =$ ...., $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) =$.........................

4. (3pkt) Proces M jest ciągłym martyngałem lokalnym na $[0,1]$ takim, że $M_0 = 0$ oraz $\mathbb{P}(M_1 = 0) < 1$. Wówczas

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |M_{k/n} - M_{(k-1)/n}|^\alpha < \infty \text{ p.n.}$$

wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha \in$.......

5. (5pkt) Niech $M_t := \int_0^t e^{W_s} dW_s$ oraz $N_t := \int_0^t s e^{-W_s} dW_s$.
a) Proces $M_t N_t - A_t$ jest martyngałem dla następującego procesu $A \in \mathcal{V}^c$, $A_t =$ ....
b)$\langle M \rangle_t =$ ....
c)$\mathcal{L}^2_\infty(M) =$..

6. (4pkt) Para (X, W) jest słabym rozwiązaniem równania

$$dX_t = \cos(tX_t)dW_t + \sin(2t)dt$$

z warunkiem początkowym $X_0 = 0$.
a) Oblicz $\mathbb{E}X_t =$...........................
b) Dla $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ o nośniku zwartym, proces $f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t g(s, X_s)ds$ jest martyngałem dla $g(t, x) =$ ....

7. (3pkt) Podaj definicję martyngału lokalnego względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{0 \leqslant t < 5}$.

8. (2pkt) Uzupełnij.
a) Każdy nieujemny ciągły martyngał lokalny jest ....
b) Każdy ograniczony ciągły martyngał lokalny jest ....

9. (3pkt) Równanie

$$dX_t = \operatorname{sgn}(X_t)dW_t$$

z warunkiem początkowym $X_0 = 0$ ma (podkreśl prawidłowe odpowiedzi): mocne rozwiązanie, słabe rozwiązanie, rozwiązanie jednoznaczne w sensie trajektorii, rozwiązanie jednoznaczne w sensie rozkładu.

10. (3pkt) Podaj sformułowanie twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej dla całki stochastycznej.

Imię i nazwisko:... Nr indeksu.....................

Egzamin z Procesów Stochastycznych II
grupa II, 5 lutego 2007

Uwaga: W poniższych zadaniach $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ oznacza zawsze standardowy proces Wienera na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Część zadaniowa

Pełne rozwiązania poniższych 5 zadań należy napisać na osobnych kartkach. Można powoływać się na wszystkie twierdzenia i fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach. Każde zadanie jest warte 7 punktów. Podpunkty oznaczone gwiazdką będą oceniane osobno.

1. Niech $X_t = \int_0^t 2^s dW_s$. Czy istnieje funkcja $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ taka, że $X_{g(t)}$ jest procesem Wienera?

2. a) Czy ciąg $S_n := \sum_{k=1}^{4n} |\sin(W_{k/n}) - \sin(W_{(k-1)/n})|^2$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa? Jeśli tak, to ile wynosi jego granica?
   b*) Czy ciąg S_n jest zbieżny w L^1?

3. Rozpatrzmy równanie
$$dX_s = dW_s + 3\cos(2s)ds, \quad s \in [0,2]$$
   z warunkiem początkowym $X_0 = 0$.
   a) Czy to równanie ma dokładnie jedno (mocne) rozwiązanie?
   b) Znajdź taką miarę probabilistyczną $\mathbb{Q}$, by proces X spełniający powyższe równanie był procesem Wienera na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.

4. a) Czy proces $X_t = W_t^4 + 3|W_t|$ jest semimartyngałem? Jeśli tak, to znajdź jego rozkład na martyngał lokalny i proces o trajektoriach o wahaniu ograniczonym na przedziałach skończonych.
   b*) Czy $|W_t|^{1/2}$ jest semimartyngałem?

5. Niech $M_t = \int_0^t e^{-s} W_s dW_s$. Czy granica $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ istnieje? W jakim sensie mamy tu zbieżność? Oblicz $\mathbb{E}M_\infty$ i $\mathrm{Var}(M_\infty)$.

Część Testowa

1. (3pkt) Proces M jest ciągłym martyngałem lokalnym na $[0,1]$ takim, że $M_0 = 0$ oraz $\mathbb{P}(M_1 = 0) < 1$. Wówczas
$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |M_{k/n} - M_{(k-1)/n}|^\alpha < \infty \text{ p.n.}$$
   wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha \in$.......

2. (5pkt) Niech $M_t := \int_0^t e^{-W_s} dW_s$ oraz $N_t := \int_0^t s^2 e^{W_s} dW_s$.
   a) Proces $M_tN_t - A_t$ jest martyngałem dla następującego procesu $A \in \mathcal{V}^c$, $A_t =$ ....
   b)$\langle M\rangle_t =$ ....
   c)$\mathcal{L}^2_\infty(M) =$...

3. (4pkt) Para (X, W) jest słabym rozwiązaniem równania
$$dX_t = \sin(tX_t)dW_t + \cos(2t)dt$$
   z warunkiem początkowym $X_0 = 0$.
   a) Oblicz $\mathbb{E}X_t =$...........................
   b) Dla $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ o nośniku zwartym, proces $f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t g(s, X_s)ds$ jest martyngałem dla $g(t,x) =$ ....

4. (4pkt) Dla $t \geqslant 0$ oblicz granice następujących zmiennych przy $n \to \infty$,

$$\sum_{k=1}^{n} W^3_{t(k-1)/n}(W_{tk/n} - W_{t(k-1)/n}) \xrightarrow{\mathbb{P}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} W^3_{tk/n}(W_{tk/n} - W_{t(k-1)/n}) \xrightarrow{\mathbb{P}}$$

5. (3pkt) Podaj definicję martyngału lokalnego względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{0\leqslant t<5}$.

6. (2pkt) Uzupełnij.
a) Każdy ograniczony ciągły martyngał lokalny jest ....
b) Każdy nieujemny ciągły martyngał lokalny jest ....

7. (4pkt) Proces $X_t = W_t^3$ spełnia stochastyczne równanie różniczkowe $dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt$, $t \geqslant 0$ z warunkiem początkowym $X_0 = 0$ dla funkcji $\sigma(x) =$ .... oraz $b(x) =$ .... Równanie to posiada/nie posiada inne mocne rozwiązanie.

8. (4pkt) Niech $X_t = \int_0^t (2+W_s)dW_s$. Oblicz $\mathbb{E}X_t =$ ...., $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) =$.........................

9. (3pkt) Równanie
$$dX_t = \mathrm{sgn}(X_t)dW_t$$
z warunkiem początkowym $X_0 = 0$ ma (podkreśl prawidłowe odpowiedzi): słabe rozwiązanie, mocne rozwiązanie, rozwiązanie jednoznaczne w sensie rozkładu, rozwiązanie jednoznaczne w sensie trajektorii.

10. (3pkt) Podaj sformułowanie twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej dla całki stochastycznej.