

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 1

- Oblicz funkcję tworzącą momenty zmiennych o następujących rozkładach:
 - symetryczny dwupunktowy;
 - dwumianowy z parametrami n, p ;
 - Poissona z parametrem λ ;
 - Gaussowski $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$;
 - wykładniczy z parametrem λ ;
 - jednostajny na $[a, b]$.
- Wykaż, że funkcja $\Lambda_X = \log M_X$ jest wypukła.
- Wykaż, że X ma skończoną funkcję tworzącą momenty na przedziale $(-t_0, t_0)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $0 < \lambda < t_0$ istnieje stała $C(\lambda)$ taka, że $\mathbf{P}(|X| > t) \leq C(\lambda)e^{-\lambda t}$ dla wszystkich $t > 0$.
- Załóżmy, że X ma skończoną funkcję tworzącą momenty na przedziale $(-t_0, t_0)$ dla pewnego $t_0 > 0$. Udowodnij, że
 - X ma wszystkie momenty skończone, tzn. $\mathbf{E}|X|^p < \infty$ dla $p > 0$;
 - $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{E}X^k$;
 - $\mathbf{E}X^k = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t)|_{t=0}$;
 - Jeśli Y zmienna losowa taka, że $M_Y(t) = M_X(t)$ dla t z pewnego otoczenia 0, to $\mu_Y = \mu_X$;
 - Rozkład X jest wyznaczony przez swoje momenty tzn. jeśli $\mathbf{E}Y^k = \mathbf{E}X^k$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}_+$, to $\mu_Y = \mu_X$;
 - Jeśli X_n ciąg zmiennych losowych taki, że $M_{X_n}(t) \rightarrow M_X(t)$ dla $t \in (-t_0, t_0)$ przy $n \rightarrow \infty$, to X_n zbiega do X według rozkładu.
- Podaj przykład dwu zmiennych losowych takich, że $\mathbf{E}X^k = \mathbf{E}Y^k$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}_+$ (zakładamy, że $\mathbf{E}|X|^k, \mathbf{E}|Y|^k < \infty$) oraz $\mu_X \neq \mu_Y$.

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. *Transformatą Fenchela-Legendre'a* funkcji f nazywamy funkcję $\mathcal{L}f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ określoną wzorem

$$\mathcal{L}f(x) := \sup\{xy - f(y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Ogólniej, gdy $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, to definiujemy

$$\mathcal{L}f(x) := \sup\{\langle x, y \rangle - f(y) : y \in \mathbb{R}^d\}.$$

- Wykaż, że:
 - $\mathcal{L}(af)(x) = a\mathcal{L}f(x/a)$ dla $a > 0$;
 - $f(x) + \mathcal{L}f(y) \geq xy$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;
 - $\mathcal{L}f$ jest funkcją wypukłą;
 - $\mathcal{L}\mathcal{L}f \leq f$;
 - $\mathcal{L}\mathcal{L}f = f$ jeśli $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wypukła, a jeśli f przyjmuje wartość ∞ , to równość zachodzi poza co najwyżej dwoma punktami;
 - $\mathcal{L}\mathcal{L}f$ to maksymalna funkcja wypukła dominowana przez f .
- Oblicz $\mathcal{L}f$ dla $f = |x|^p$, $1 \leq p \leq \infty$.

8. Załóżmy, że X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, a $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Wyraż $\Lambda_{S_n}^*$ za pomocą Λ_X^* .
9. Oblicz Λ_X^* dla rozkładów z zadania 1.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 2

1. Udowodnij, że dla $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ oraz dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n \in A) = -\text{essinf} \left\{ \frac{x^2}{2} : x \in A \right\}.$$

2. Podaj przykład zmiennej X dla której nie istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n = 0)$.

3. Wykaż, że dla dowolnej zmiennej X ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n \geq t) = -\inf_{s \geq t} \Lambda_X^*(s).$$

4. Wykaż, że

- Funkcja Λ_X^* jest półciągła z dołu dla dowolnej zmiennej X ;
- Jeśli $0 \in \text{Int} D_{\Lambda_X}$, to $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \Lambda_X^*(t) = \infty$, w szczególności zbiory $\{t: \Lambda_X^*(t) \leq a\}$ są zwarte dla $a \in \mathbb{R}$;
- Jeśli $D_{\Lambda_X} = \mathbb{R}$, to $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \Lambda_X^*(t)/|t| = \infty$.

5. Załóżmy, że współrzędne $X^{(j)}$ wektora losowego X są niezależnymi zmiennymi losowymi. Wyraź Λ_X i Λ_X^* za pomocą $\Lambda_{X^{(j)}}$ i $\Lambda_{X^{(j)}}^*$.

6. Niech X będzie gaussowskim d -wymiarowym wektorem losowym o średniej a i macierzy kowariancji C . Znajdź Λ_X i Λ_X^* .

- Wykaż, że jeśli X jest wektorem losowym w \mathbb{R}^d oraz $t \notin \overline{\text{conv}(\text{supp } \mu_X)}$, to $\Lambda_X^*(t) = \infty$.
- Podaj przykład wektora losowego X oraz $t \notin \text{supp } \mu_X$ takiego, że $\Lambda_X^*(t) < \infty$.

8. Uogólnij fakt z wykładu i znajdź takie liczby $a_i > 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$, że dla dowolnego $t > 0$ oraz $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\sum_{i=0}^{2k+1} (-1)^i a_i t^{-2i-1} < e^{t^2/2} \int_t^\infty e^{-s^2/2} ds < \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i a_i t^{-2i-1}.$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 3

1. Załóżmy, że X jest zmienną d -wymiarową taką, że $D_{\Lambda_X} = \mathbb{R}^d$. Wykaż, że jeśli $I: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ jest półciągłą z dołu oraz dla wszystkich zbiorów borelowskich A w \mathbb{R}^d zachodzi

$$-\inf_{x \in \text{int}(A)} I(x) \leq \liminf \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n \in A) \leq \limsup \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n \in A) \leq -\inf_{x \in \text{cl}(A)} I(x), \quad (1)$$

to $I = \Lambda_X^*$. Podaj przykład funkcji $I \neq \Lambda_X^*$ dla której tożsamość (1) jest spełniona dla wszystkich zbiorów borelowskich.

2. (Nierówność Azumy) Załóżmy, że $(M_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^\infty$ jest martyngałem takim, że $\|M_k - M_{k-1}\|_\infty \leq a_k$ dla $k = 1, 2, \dots$. Wykaż, że

$$\Lambda_{M_n - M_0}(t) \leq \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2$$

oraz

$$\mathbf{P}(|M_n - M_0| \geq s) \leq 2 \exp\left(-\frac{u^2}{2 \sum_{k=1}^n a_k^2}\right).$$

3. Przy oznaczeniach poprzedniego zadania, wykaż, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla $p \geq 2$,

$$\|M_n - M_0\|_p := (\mathbf{E}|M_n - M_0|^p)^{1/p} \leq C \sqrt{p} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2}.$$

4. (Nierówności Chińczyna) Niech $S = \sum_{k=1}^n a_k \varepsilon_k$, gdzie ε_k niezależne zmienne losowe takie, że $\mathbf{P}(\varepsilon_k = \pm 1) = 1/2$.

i) Wykaż, że dla $p, q > 0$ istnieje stała $C_{p,q}$ zależna tylko od p i q dla której $\|S\|_p \leq C_{p,q} \|S\|_q$.

ii) Wykaż, że $C_{p,2} \leq C \sqrt{p}$ dla $p \geq 2$.

iii) Udowodnij, że dla $p > q$, $C_{p,q} \geq \gamma_p / \gamma_q$, gdzie $\gamma_p = (\mathbf{E}|\mathcal{N}(0, 1)|^p)^{1/p} \sim \sqrt{p}$ przy $p \rightarrow \infty$. W szczególności $C_{p,2} \geq c \sqrt{p}$ dla $p \geq 2$ i stałej uniwersalnej c .

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 4

1. Rozpatrując rozkłady wykładnicze, gaussowskie i Poissona pokaż, że nie można poprawić rzędu oszacowań w nierównościach Bernsteina i Bennetta.
2. Załóżmy, że $(M_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^\infty$ jest martyngałem takim, że

$$\max_k \|M_k - M_{k-1}\|_\infty \leq a, \quad \|\mathbf{E}((M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1})\|_\infty \leq \sigma_k^2$$

oraz $\sigma^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. Wykaż, że

$$\Lambda_{M_n - M_0}(t) \leq \frac{\sigma^2}{a^2} (e^{ta} - ta - 1)$$

oraz

$$\mathbf{P}(|M_n - M_0| \geq s) \leq 2 \exp\left(-\frac{s}{2a} \ln\left(1 + \frac{sa}{\sigma^2}\right)\right).$$

3. Wykaż, że z odwrotnej nierówności wykładniczej Kołmogorowa wynika, że dla $\varepsilon > 0$ istnieją stałe $\delta'(\varepsilon) > 0$ i $K'(\varepsilon) < \infty$ takie, że dla niezależnych zmiennych X_i o średniej zero,

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq s\right) \geq \frac{1}{K'(\varepsilon)} \exp\left(- (1 + \varepsilon) \frac{s^2}{2\sigma^2}\right),$$

o ile

$$\max(s, \sigma) \max_i \|X\|_\infty \leq \delta'(\varepsilon) \sigma^2.$$

4. Niech X_i będą niezależnymi symetrycznymi zmiennymi losowymi o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha F , zaś $a_i \in [-1, 1]$. Wykaż, że dla dowolnej funkcji wypukłej $f: F \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\mathbf{E}f\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) \leq \mathbf{E}f\left(\sum_{i=1}^n X_i\right).$$

Wynioskuj stąd, że dla funkcji wypukłej, niemalejącej $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\mathbf{E}f\left(\left\|\sum_{i=1}^n a_i X_i\right\|\right) \leq \mathbf{E}f\left(\left\|\sum_{i=1}^n X_i\right\|\right).$$

5. Wykaż, że przy założeniach poprzedniego zadania nie musi być prawdą, że dla $s > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\left\|\sum_{i=1}^n a_i X_i\right\| \geq s\right) \leq \mathbf{P}\left(\left\|\sum_{i=1}^n X_i\right\| \geq s\right).$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 5

1. Załóżmy, że F jest ośrodkową przestrzenią Banacha. Wykaż, że $\mathcal{B}_{F \times F} = \mathcal{B}_F \otimes \mathcal{B}_F$. Wywnioskuj stąd, że suma funkcji mierzalnych o wartościach w F jest funkcją mierzalną.
2. Wykaż, że dla niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie

$$\mathbf{E} \max_{k \leq n} \|S_k\|^p \leq C^p \mathbf{E} \|S_n\|^p$$

dla $p \geq 1$ i stałej uniwersalnej C .

3. Wykaż, że dla niezależnych zmiennych losowych

$$\mathbf{E} \max_{k \leq n} \|S_k\|^p \leq C^p \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{E} \|S_k\|^p$$

dla $p \geq 1$ i stałej uniwersalnej C .

4. Udowodnij, że dla niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie oraz $a_i \in [-1, 1]$,

$$\mathbf{P} \left(\left\| \sum_{i=1}^n a_i X_i \right\| \geq 12t \right) \leq 8\mathbf{P}(\|S_n\| \geq t), \quad \text{dla } t > 0.$$

5. Wykaż, że nie istnieje stała uniwersalna C taka, że

$$\mathbf{E} \max_{k \leq n} |M_k| \leq C \mathbf{E} |M_n|$$

dla dowolnego martyngału $(M_k)_{1 \leq k \leq n}$.

6. Załóżmy, że $X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Udowodnij, że istnieją uniwersalne stałe C_1 i C_2 dla których

$$\mathbf{P} \left(\max_{k, l \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l h(X_i, Y_j) \right| \geq t \right) \leq C_1 \mathbf{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h(X_i, Y_j) \right| \geq \frac{t}{C_2} \right)$$

dla dowolnej funkcji mierzalnej h .

7. Niech X_i będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych w ośrodkowej przestrzeni Banacha F . Wykaż, że następujące warunki są równoważne.
 - i) $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ zbiega według prawdopodobieństwa.
 - ii) $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ zbiega p.n..
 - iii) $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ zbiega według rozkładu.
8. Wykaż, że istnieją stałe C_i taka, że dla dowolnych niezależnych rzeczywistych zmiennych losowych X_i oraz liczb a_k ,

$$\mathbf{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} \|S_k - a_k\| \geq C_2 t \right) \leq C_1 \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{P}(\|S_k - a_k\| \geq t).$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 6

- Niech X będzie zmienną losową o wartościach w osrodkowej przestrzeni Banacha F . Wykaż, że
 - dla $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $\varphi: F \rightarrow F$ przyjmująca tylko przeliczalnie wiele wartości taka, że $\|X - \varphi(X)\| \leq \varepsilon$ p.n.,
 - jeśli $\mathbf{E}\|X\| < \infty$, to dla $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $\varphi: F \rightarrow F$ przyjmująca tylko skończenie wiele wartości taka, że $\mathbf{E}\|X - \varphi(X)\| \leq \varepsilon$.
- Wykaż, że jeśli X_i są niezależnymi zmiennymi o jednakowym rozkładzie takimi, że $\mathbf{P}(X_i \neq 0) > 0$, to $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n\|}{\sqrt{n}} = \infty$ p.n..
- Założmy, że $p \geq 1$, X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej zero takimi, że $\mathbf{E}|X_i|^p < \infty$, zaś (ε_i) jest ciągiem Bernoulliego, niezależnym od zmiennych X_i . Wykaż, że

$$\frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|_p \leq \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i X_i \right\|_p \leq 2 \left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|_p.$$

- Założmy, że X_i są niezależne o wartościach w F . Wykaż, że
 - Dla dowolnych $s, t > 0$,

$$\mathbf{P} \left(\max_{k \leq n} \|S_k\| > 3t + s \right) \leq \mathbf{P} \left(\max_{k \leq n} \|S_k\| > t \right)^2 + \mathbf{P} \left(\max_{k \leq n} \|X_k\| > s \right).$$

- Jeśli zmienne X_i są symetryczne, to dla $s, t > 0$,

$$\mathbf{P} \left(\max_{k \leq n} \|S_k\| > 2t + s \right) \leq 4\mathbf{P}(\|S_n\| > t)^2 + \mathbf{P} \left(\max_{k \leq n} \|X_k\| > s \right).$$

- Niech $S := \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ dla pewnych $x_i \in F$. Wykaż, że dla $p, q > 0$ istnieją stałe $C_{p,q} < \infty$ zależne tylko od p i q takie, że

$$(\mathbf{E}\|S\|^p)^{1/p} \leq C_{p,q} (\mathbf{E}\|S\|^q)^{1/q}.$$

- Założmy, że $0 < p < \infty$, zmienne X_i są niezależne i symetryczne o wartościach w F . Wykaż, że

$$\mathbf{E}\|S_n\|^p \leq 2 \cdot 3^p \mathbf{E} \max_{i \leq n} \|X_i\|^p + 2(3t_0)^p,$$

gdzie

$$t_0 := \inf\{t > 0: \mathbf{P}(\|S_n\| > t) \leq (8 \cdot 3^p)^{-1}\}.$$

- Przestrzeń Banacha F nazywamy typu $p \geq 1$ jeśli istnieje stała T_p taka, że dla dowolnych wektorów $x_i \in F$,

$$\left(\mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \right\|^p \right)^{1/p} \leq T_p \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}.$$

Wykaż, że

- a) Jeśli przestrzeń jest typu p , to jest typu q dla $q \leq p$.
 - b) Przestrzenie Hilberta są typu 2.
 - c) Każda przestrzeń Banacha jest typu 1 i nie istnieją przestrzenie typu $p > 2$.
 - d) Przestrzeń L^p jest typu $\min\{p, 1\}$ dla $p < \infty$.
 - e) Przestrzeń c_0 nie ma nietrywialnego typu.
8. Wykaż, że ośrodkowa przestrzeń Banacha F ma typ p wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnych niezależnych zmiennych losowych Z_i o wartościach w F i średniej zero,

$$\mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n Z_i \right\|^p \leq C \sum_{i=1}^n \mathbf{E} \|Z_i\|^p.$$

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 7

1. Podaj alternatywny dowód Prawa Iterowanego Logarytmu wykorzystując PIL dla procesu Wienera oraz twierdzenie Skorochoda o włożeniu:
Jeśli X jest zmienną losową o skończonej wariancji i średniej zero, to istnieje moment zatrzymania τ taki, że $\mathbf{E}\tau = \mathbf{E}X^2$ oraz W_τ ma taki sam rozkład jak X .

2. Załóżmy, że X_i są niezależnymi ograniczonymi zmiennymi losowymi o średniej zero spełniającymi warunki:

$$\text{i) } a_n^2 := \text{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i^2 \rightarrow \infty$$

$$\text{ii) } \|X_n\|_\infty \frac{\sqrt{\ln \ln a_n^2}}{a_n} \rightarrow 0.$$

Wykaż, że

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2a_n^2 \ln \ln a_n^2}} = 1 \quad \text{p.n.}$$

3. Załóżmy, że X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie ze średnią zero i wariancją σ^2 . Wykaż, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}}\right) = \sup_{t \in [-\sigma, \sigma]} f(t) \quad \text{p.n.},$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}}\right) = \inf_{t \in [-\sigma, \sigma]} f(t) \quad \text{p.n.}$$

4. Załóżmy, że X_i są niezależnymi wektorami losowymi w ośrodkowej przestrzeni Banacha o tym samym rozkładzie co X . Wykaż, że warunek

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n\|}{\sqrt{2n \ln \ln n}} < \infty \quad \text{p.n.}$$

implikuje:

$$\text{i) } \mathbf{E} \frac{\|X\|^2}{LL\|X\|} < \infty, \text{ gdzie } LLx := \ln \ln(x \vee 10).$$

$$\text{ii) } \mathbf{E}X = 0 \text{ oraz } \sup_{\|x^*\| \leq 1} \mathbf{E}|x^*(X)|^2 < \infty.$$

5. Załóżmy, że X_i są niezależnymi wektorami losowymi w ośrodkowej przestrzeni Banacha typu 2 o tym samym rozkładzie co X , $\mathbf{E}X = 0$ oraz $\mathbf{E} \frac{\|X\|^2}{LL\|X\|} < \infty$. Wykaż, że $\frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}}$ zbiega do 0 według prawdopodobieństwa.
6. Wykaż, że jeśli ciąg (X_n) zmiennych o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha jest ciasny, to jest stochastycznie ograniczony. Udowodnij, że w każdej nieskończonej wymiarowej przestrzeni Banacha istnieje ciąg stochastycznie ograniczony, który nie jest ciasny.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 8

W zadaniach poniżej zmienne X, X_1, \dots mają taki sam rozkład o wartościach w \mathbb{R}^d oraz $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Załóżmy, że \mathcal{F}_n jest rosnącym ciągiem sigma ciał, $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n)$ oraz μ jest miarą probabilistyczną na \mathcal{F} . Udowodnij, że dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje n i $A_n \in \mathcal{F}_n$ takie, że $\mu(A \Delta A_n) \leq \varepsilon$.
2. Wykaż mocną własność Markowa dla (S_n) , tzn., że dla każdego τ momentu zatrzymania względem filtracji generowanej przez (X_n) , dowolnego $A \in \mathcal{F}_\tau$ oraz $B \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))^\infty$,

$$\mathbf{P}(\{(S_{n+\tau} - S_\tau)_{n \geq 0} \in B\} \cap A \cap \{\tau < \infty\}) = \mathbf{P}(\{(S_n)_{n \geq 0} \in B\})\mathbf{P}(A \cap \{\tau < \infty\}).$$

3. Wykaż, że jeśli błądzenie (S_n) jest powracające, to dla dowolnego $k = 1, 2, \dots$ błądzenie (S_{nk}) jest powracające.
4. Wykaż, że jeśli $\mathbf{P}(X_1 = 0) < 1$, to $|S_n| \rightarrow \infty$ według prawdopodobieństwa.
5. Załóżmy, że $d = 1$, X jest symetryczny oraz ograniczony. Wykaż, że $\limsup \pm S_n = \infty$ i wywnioskuj stąd, że S_n jest powracalny.
6. Wykaż, że zbiór A punktów osiągalnych przez błądzenie losowe jest równy najmniejszej domkniętej półgrupie zawierającej nośnik X . Podaj przykład pokazujący, że A nie musi być grupą.
7. Niech X będzie jednowymiarowym rozkładem p -stabilnym o funkcji charakterystycznej $e^{-|t|^p}$. Wykaż, że S_n jest powracający dla $p \geq 1$ i chwilowy dla $p < 1$.
8. Załóżmy, że $d = 2$ oraz współrzędne X są niezależnymi zmiennymi losowymi o funkcji charakterystycznej $e^{-|t|^p}$. Wykaż, że S_n jest powracalny dla $p = 2$ i chwilowy dla $p < 2$.
9. Niech (S'_n) oznacza niezależną kopię (S_n) . Wykaż, że jeśli S_n jest powracające, to $S_n - S'_n$ jest powracające.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 9

1. Udowodnij, że jeśli nośnik zmiennej X rozpiną przestrzeń wymiaru większego niż 2, to błądzenie S_n jest chwilowe.
2. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wykaż, że błądzenie (S_n) generowane przez zmienną o f.ch. φ jest powracalne, jeśli

$$\int_{|t| \leq \varepsilon} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \varphi(t)} \right) dt = \infty$$

oraz chwilowe, jeśli

$$\int_{|t| \leq \varepsilon} \frac{1}{1 - \operatorname{Re}(\varphi(t))} dt < \infty.$$

3. Wykaż, że dla dowolnego symetrycznego błądzenia losowego (S_n) i dowolnego momentu zatrzymania τ (względem filtracji generowanej przez (S_n)), ciąg (S_n) ma ten sam rozkład co ciąg (\tilde{S}_n) dany wzorem

$$\tilde{S}_n := S_{n \wedge \tau} - (S_n - S_{n \wedge \tau}), \quad n \geq 0.$$

4. Niech (S_n) będzie klasycznym symetrycznym błądzeniem losowym na \mathbb{Z} (czyli $\mathbf{P}(S_1 = \pm 1) = 1/2$). Określmy $V_n := \max\{k \leq n : S_{2k} = 0\}$. Oblicz $\mathbf{P}(V_n = k)$ dla $0 \leq k \leq 2n$.
5. Załóżmy, że $\mu = c\mu_1 + (1-c)\mu_2$, gdzie $c \in (0, 1)$, zaś μ_1 i μ_2 są symetrycznymi miarami probabilistycznymi na \mathbb{R}^d . Wykaż, że jeśli błądzenie losowe generowane przez μ jest powracalne, to powracalne są błądzenia losowe generowane przez μ_1 i μ_2 . Czy implikacja w przeciwną stronę jest prawdziwa?
6. Załóżmy, że $X = Y + Z$, gdzie Y i Z są niezależnymi symetrycznymi wektorami losowymi w \mathbb{R}^d .
 - i) Wykaż, że jeśli błądzenie losowe generowane przez X jest powracalne, to również błądzenia losowe generowane przez Y i Z są powracalne.
 - ii) Pokaż przykład pokazujący, że implikacja przeciwna do i) jest fałszywa.
7. Niech S_n będzie niezdegenerowanym jednowymiarowym błądzeniem losowym. Wykaż, że
 - i) $\limsup S_n = \infty$ p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_1 < \infty$ p.n.
 - ii) $S_n \rightarrow \infty$ p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{E}\sigma_1 < \infty$
 - iii) i) i ii) zachodzą gdy σ_1 zastąpimy przez τ_1 .

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 10

1. Przypomnijmy, że miara ze znakiem, to różnica dwóch miar skończonych. Wykaż, że jeśli μ i ν są miarami ze znakiem na \mathbb{R}^d i

$$\int \exp(i\langle t, x \rangle) d\mu(x) = \int \exp(i\langle t, x \rangle) d\nu(x) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}^d,$$

to $\mu = \nu$.

2. Załóżmy, że μ i ν są miarami (skończonymi lub ze znakiem) na $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ oraz

$$\int s^n e^{itx} d\mu(s, x) = \int s^n e^{itx} d\nu(s, x),$$

to $\mu = \nu$.

3. Załóżmy, że μ jest lokalnie skończoną miarą na \mathbb{R}_+ niezmienniczą na przesunięcia, tzn. $\mu(B+t) = \mu(B)$ dla $t \geq 0$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Wykaż, że $\mu = a\lambda$ dla pewnego $a \geq 0$.
4. Mówimy, że rozkład μ na \mathbb{R} jest niearytmetyczny, jeśli grupa generowana przez nośnik μ jest gęsta w \mathbb{R} , w przeciwnym przypadku μ nazywamy arytmetycznym. Wykaż, że μ jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy nośnik μ jest zawarty w $\delta\mathbb{Z}$ dla pewnego $\delta > 0$.
5. Załóżmy, że zmienne X i X' mają jednakowy rozkład. Wykaż, że jeśli rozkład X jest arytmetyczny, to rozkład $X - X'$ też jest arytmetyczny. Podaj przykład pokazujący, że przeciwna implikacja jest fałszywa.
6. Załóżmy, że η jest procesem odnowienia dla błędzenia losowego o nieujemnym i niearytmetycznym rozkładzie przyrostów. Wykaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $t(\varepsilon) > 0$ takie, że $\mathbf{E}\eta[t, t + \varepsilon] > 0$ dla $t \geq t(\varepsilon)$.
7. Załóżmy, że μ jest rozkładem na \mathbb{Z}_+ o średniej $c \in (0, \infty)$ takim, że grupa generowana przez $\text{supp}(\mu)$ jest równa \mathbb{Z} . Wykaż, że błędzenie losowe (S_n) po \mathbb{Z}_+ ma stacjonarny proces odnowienia wtedy i tylko wtedy, gdy rozkład początkowy ν jest dany wzorem $\nu(\{n\}) = c^{-1}\mu(n, \infty)$, $n = 0, 1, 2, \dots$
8. Uogólnij poprzednie zadanie na przypadek, gdy μ jest rozkładem na \mathbb{Z} o dodatniej, skończonej średniej.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 11

1. Załóżmy, że ν, ν_1, ν_2, \dots są miarami lokalnie skończonymi na \mathbb{R}_+ . Wykaż, że $\nu_n \xrightarrow{v} \nu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu_n([0, x]) \rightarrow \nu[0, x]$ dla każdego $x > 0$ takiego, że $\nu(\{x\}) = 0$. Jak wygląda analogiczny warunek dla miar na \mathbb{R} ?
2. Wykaż, że dla miar probabilistycznych na \mathbb{R}^d następujące warunki są równoważne:
 - i) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, tzn. $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ dla $f \in C_{\text{ogr}}(\mathbb{R}^d)$
 - ii) $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, tzn. $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ dla $f \in C_{\text{zw}}(\mathbb{R}^d)$
 - iii) $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ dla f ciągłych na \mathbb{R}^d takich, że $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
 Pokaż, że dla miar subprobabilistycznych warunki ii) i iii) są równoważne, a dla miar lokalnie skończonych tylko warunek ii) jest prawidłowo sformułowany.
3. Udowodnij Lemat 7.10 z wykładu o zbieżności ν_t do $\tilde{\nu}$ w pełnej ogólności, tzn. gdy przyrosty błędzenia mają rozkład niearytmetyczny o skończonej średniej dodatniej. W tym celu rozważmy zmienne niezależne $S_0, S'_0, X_1, \varepsilon_1, X_2, \varepsilon_2, \dots$ takie, że S_0 ma rozkład ν , S'_0 rozkład $\tilde{\nu}$, zmienne X_k rozkład μ oraz $\mathbf{P}(\varepsilon_k = \pm 1) = 1/2$ oraz błędzenie losowe

$$\tilde{S}_n = S'_0 - S_0 - \sum_{k=1}^n \varepsilon_k X_k, \quad n = 0, 1, \dots$$

- i) Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 ciąg (\tilde{S}_n) jest gęsty w \mathbb{R} , w szczególności moment zatrzymania $\tau := \inf\{n: \tilde{S}_n \in [0, \varepsilon]\}$ jest skończony p.n.
- ii) Niech $\varepsilon'_k := (-1)^{\mathbb{1}_{\{k \leq \tau\}}} \varepsilon_k$. Wykaż, że (ε'_k) jest niezależnym od S_0, S'_0 i X_k ciągiem niezależnych zmiennych losowych i $\mathbf{P}(\varepsilon'_k = \pm 1) = 1/2$.
- iii) Niech $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots$ będą kolejnymi wartościami k dla których $\varepsilon_k = 1$, podobnie zdefiniujmy ciąg $\kappa'_1 < \kappa'_2 < \dots$ poprzez zmienne ε'_k . Wówczas ciągi

$$S_n = S_0 + \sum_{j \leq n} X_{\kappa_j}, \quad S'_n = S'_0 + \sum_{j \leq n} X_{\kappa'_j}$$

są błędzeniami losowymi o rozkładzie przyrostów μ i rozkładzie początkowym równym odpowiednio ν i $\tilde{\nu}$.

- iv) Niech $\tau_{\pm} = \sum_{k \leq \tau} \mathbb{1}_{\{\varepsilon_k = 1\}}$, wówczas

$$S'_{\tau_- + n} - S_{\tau_+ + n} = \tilde{S}_{\tau} \in [0, \varepsilon].$$

- v) Wywnioskuj stąd, że

$$\tilde{\nu}[\varepsilon, x] - \mathbf{P}(Z \geq t) \leq \nu_t[0, x] \leq \tilde{\nu}[0, x + \varepsilon] + \mathbf{P}(Z \geq t)$$

gdzie $Z := \max\{\max_{k \leq \tau_-} S'_k, \max_{k \leq \tau_+} S_k\}$.

- vi) Pokaż, że $\nu_t[0, x] \rightarrow \tilde{\nu}[0, x]$, czyli $\nu_t \xrightarrow{v} \nu$.

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa III - 12

1. Wykaż, że funkcja o nośniku w $[0, x]$ jest bezpośrednio całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowalna w sensie Riemanna na $[0, x]$.
2. Wykaż, że każda funkcja monotoniczna z $L_1(\mathbb{R}_+)$ jest bezpośrednio całkowalna w sensie Riemanna.
3. Podaj przykład funkcji ciągłej z $L_1(\mathbb{R}_+)$, która nie jest bezpośrednio całkowalna w sensie Riemanna.
4. Załóżmy, że μ jest rozkładem na liczbach całkowitych dodatnich o średniej $c \in (0, \infty)$ oraz grupa generowana przez μ jest równa \mathbb{Z} . Niech η będzie procesem odnowienia dla błędzenia losowego na \mathbb{N} startującego z zera o przyrostach μ .
 - i) Skonstruuj łańcuch Markowa X_n na \mathbb{N} taki, że $X_{n+1} = X_n + 1$ lub 0 oraz czas powrotu do zera dla X_n ma rozkład μ .
 - ii) Udowodnij, że czasy kolejnych powrotów przez X_n do zera tworzą błędzenie losowe o przyrostach η .
 - iii) Wykaż, że łańcuch X_n jest nieprzywiedlny, nieokresowy i ma rozkład stacjonarny.
 - iv) Stosując twierdzenie ergodyczne wykaż, że $\mathbf{E}\eta\{k\} \rightarrow c^{-1}$ przy $k \rightarrow \infty$.
5. Rozważmy proces odnowy η dla błędzenia losowego startującego z zera o niearytmetycznym rozkładzie przyrostów μ na \mathbb{R}_+ ze średnią $c > 0$. Ustalmy $h > 0$ i określmy $F(t) = \mathbf{P}(\eta(t, t+h] = 0)$. Wykaż, że F spełnia równanie odnowienia $F = f + F * \mu$, gdzie $f(t) = \mu(t+h, \infty)$. Znajdź granicę $F(t)$ przy $t \rightarrow \infty$.