Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa III

Egzamin składa się z dwóch części: pisemnej i ustnej.

Część pisemna trwa 3 tygodnie i polega na **samodzielnym** rozwiązaniu sześciu spośród podanych poniżej zadań, w tym przynajmniej 3 spośród zadań 1-6 i przynajmniej 2 spośród zadań 7-11. Rozwiązania należy do mnie dostarczyć do dnia 18.02.2015 (drogą elektroniczną, osobiście lub np. włożyć do skrytki). W rozwiązaniach można wykorzystywać wszystkie fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Mówimy, że zmienna X ma rozkład subgaussowski ze stałą β, jeśli $\mathbf{E}X = 0$ oraz istnieje $\beta < \infty$ takie, że dla $k = 1, 2, \ldots$, $\|X\|_{2k} \leqslant \beta \|g\|_{2k}$, gdzie $g \sim \mathcal{N}(0,1)$.
   a) Wykaż, że każdy z następujących warunków jest równoważny subgaussowskości X dla zmiennej o średniej zero
   i) Istnieje $c < \infty$ takie, że $\mathbf{E}e^{\lambda X} \leqslant e^{c\lambda^2}$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$,
   ii) $\mathbf{E}e^{c|X|^2} < \infty$ dla pewnego $c > 0$.
   b) Wykaż, że jeśli niezależne zmienne X_i są subgaussowskie ze stałą β oraz $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$, to $\sum_{i=1}^{\infty} a_i X_i$ też jest subgaussowski. Jak można oszacować jego stałą subgaussowskości?

2. Podaj przykład jednowymiarowej zmiennej losowej X oraz funkcji $I \neq \Lambda_X^*$ takiej, że dla dowolnego zbioru borelowskiego A,
$$-\inf_{x \in \mathrm{int}(A)} I(x) \leqslant \liminf \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n \in A) \leqslant \limsup \frac{1}{n} \log \mathbf{P}(\bar{S}_n \in A) \leqslant -\inf_{x \in \mathrm{cl}(A)} I(x),$$
   przy czym tak jak na wykładzie $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, gdzie X_i są niezależnymi kopiami X.

3. Niezależne wektory losowe $X_1, X_2, \ldots$ o wartościach w $\mathbb{R}^d$ mają jednakowy rozkład z gęstością $2^{-d}\exp(-\sum_{i=1}^{d} |x_i|)$. Czy istnieje granica
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\Big| \geqslant 1)?$$
   Jeśli tak, to ile ona wynosi? (Tu i w następnym zadaniu $|x|$ oznacza długość euklidesową wektora x).

4. Niezależne wektory losowe $X_1, X_2, \ldots$ mają rozkład jednostajny na zbiorze
$$K = \Big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \sum_{i=1}^{d} i|x_i| \leqslant 1\Big\}$$
   oraz $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
   a) Znajdź $\limsup_{n \to \infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \log\log n}}$,
   b) Co można powiedzieć o zbiorze punktów skupienia ciągu $\frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log n}}$?

5. Ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, X_3, \ldots$ jest 1-symetryczny, tzn. dla dowolnych liczb $\eta_n \in \{-1, 1\}$ rozkłady ciągów $(X_n)_n$ i $(\eta_n X_n)_n$ są jednakowe. Wykaż, że
   a) $\mathbf{P}(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\sum_{i=1}^{k} X_i| \geqslant t) \leqslant 2\mathbf{P}(|\sum_{i=1}^{k} X_i| \geqslant t)$.
   b) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ zbiega prawie na pewno wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

6. Zmienne $X_1,\dots,X_n$ o wartościach w ośrodkowej przestrzeni Banacha $(F,\|\ \|)$ są niezależne, symetryczne oraz $\mathbf{P}(\|X_i\|>t)=1$ dla wszystkich i. Wykaż, że dla dowolnego $x\in F$,
$$\mathbf{P}\left(\left\|\sum_{i=1}^n X_i+x\right\|\leqslant t\right)\leqslant 2^{-n}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}.$$
Podaj przykład pokazujący, że stałej $2^{-n}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ nie można polepszyć.

7. Błądzenie losowe (S_n) startuje z zera i ma przyrosty o rozkładzie μ_β z gęstością $c_\beta(1+|x|)^{-\beta}$, $\beta>1$. Dla jakich parametrów β błądzenie (S_n) jest powracające, a dla jakich chwilowe?

8. Podaj przykład błądzeń losowych (S_n) startujących z zera takich, że
a) $\mathbf{E}|S_1|=\infty$ oraz S_n jest powracające,
b) $\mathbf{E}S_1^+=\mathbf{E}S_1^-=\infty$ oraz $S_n\to\infty$ p.n..
c) Czy możliwe jest, że S_n jest powracające, ale $S_n\to\infty$ wg prawdopodobieństwa?

9. Niech S_n będzie niezdegenrowanym błądzeniem losowym. Wykaż, że
i) $\limsup S_n=\infty$ p.n., jeśli $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n>0)=\infty$,
ii) $\limsup S_n=-\infty$ p.n., jeśli $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n>0)<\infty$.

10. Załóżmy, że η jest procesem odnowienia dla błądzenia losowego o niearytmetycznym rozkładzie przyrostów na $[0,\infty)$. Wykaż, że dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje $t(\varepsilon)>0$ takie, że $\mathbf{E}\eta[t,t+\varepsilon]>0$ dla $t\geqslant t(\varepsilon)$.

11. Nieujemne, niezdegenerowane zmienne losowe $X_1,Y_1,X_2,Y_2,\dots$ są niezależne, przy czym X_i mają rozkład μ, zaś Y_i rozkład ν. Niech $S_n=\sum_{i=1}^n(X_i+Y_i)$, zaś $U=\bigcup_{n\geqslant 0}[S_n,S_n+X_{n+1})$. Wykaż, że funkcja $F(t)=\mathbf{P}(t\in U)$, $t\geqslant 0$ spełnia równanie odnowienia $F=f+F*\mu*\nu$, gdzie $f(t)=\mu(t,\infty)$. Zakładając, że X_i+Y_i ma rozkład niearytmetyczny o skończonej średniej oblicz $\lim_{t\to\infty}F(t)$.

Część ustna będzie oparta na rozmowie o przedstawionych rozwiązaniach oraz o wybranych tematach spośród następujących:

- Wielkie odchylenia
- Nierówności wykładnicze
- Nierówności maksymalne
- Mocne prawa wielkich liczb
- Prawo iterowanego logarytmu
- Błądzenia losowe - powracalność i chwilowość
- Momenty drabinowe i faktoryzacja Wienera-Hopfa
- Teoria odnowienia

Można wybrać 2 tematy z których nie chce się odpowiadać.