Egzamin z Analizy Funkcjonalnej- Część zadaniowa
16 czerwca 2016

Spośród poniższych zadań należy **wybrać cztery** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–8 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Operator liniowy $T\colon c_0 \to c_0$ jest ciągły i $Te_n = a_n(e_{2n+1} + e_{2n+2})$ dla $n = 1, 2, \ldots$, gdzie (e_n) jest kanoniczną bazą c_0, zaś (a_n) jest ciągiem ograniczonym.
   i) Podaj (i uzasadnij) ogólny wzór na Tx dla $x \in c_0$. Oblicz $\|T\|$.
   ii) Wykaż, że T jest operatorem zwartym wtedy i tylko wtedy, gdy a_n jest zbieżny do zera.

2. Określmy operator $T\colon L_1[0,\infty) \mapsto l_1$ wzorem
$$Tf = \left(\frac{n}{n+1}\int_n^{n+1} f(x)dx\right)_{n\geqslant 1}.$$
   i) Wykaż, że T jest dobrze określony i ciągły. Oblicz $\|T\|$.
   ii) Znajdź T^* i oblicz $\|T^*\|$.

3. Wykaż, że operator liniowy T z przestrzeni Banacha X w przestrzeń l_1 jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego n, przekształcenie $x \mapsto \sum_{k=n}^{\infty}(Tx)_k$ jest ciągłym funkcjonałem na X.

4. Rozpatrzmy operator S na $L_2(\mathbb{R})$ zadany wzorem $Sf(x) = ih(x)f(x+1)$, gdzie h jest funkcją ograniczoną z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{C}$.
   i) Wykaż, ze S jest dobrze określony i ciągły.
   ii) Oblicz sprzeżęnie Hilbertowskie S^*.
   iii) Wyznacz wszystkie funkcje ograniczone h dla których S jest operatorem unitarnym.

5. Wykaż, że ciąg funkcji f_n zbiega słabo do zera w $L_4[0,2]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą następujące dwa warunki:
   i) $\sup_n \int_0^2 |f_n(x)|^4 dx < \infty$,
   ii) $\lim_{n\to\infty} \int_0^2 x^k f_n(x)dx = 0$ dla $k = 0, 1, 2 \ldots$.

Imię i nazwisko:... Numer indeksu:........................

Egzamin z Analizy Funkcjonalnej- Część Testowa
grupa I, 16 czerwca 2016

Należy podać tylko krótkie odpowiedzi (w możliwie najprostszej postaci) na podane poniżej polecenia. Test ma dwie strony.

1. (3pkt) Uzupełnij definicje:
   i) Operator liniowy ciągły S na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest unitarny, jeśli.....

   ii) Operator liniowy ciągły S na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest samosprzężony, jeśli.....

   iii) Operator liniowy ciągły S na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest zwarty, jeśli.....

2. (3pkt) Niech $p, q \in [1, \infty]$, zaś $a(p, q)$ będzie najmniejszą liczbą taką, że
   $$\|f\|_{L_q[0,5]} \leqslant a(p,q)\|f\|_{L_p[0,5]} \quad \text{dla dowolnej funkcji } f \in L_p[0,5].$$
   Wówczas $a(p, q) < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy.....................................
   oraz jeśli $a(p, q) < \infty$, to $a(p, q) =$...........................

3. (2pkt) Podaj definicję przestrzeni $L_\infty(\mathbb{R})$ oraz odpowiedniej normy.

4. (2pkt) Sformułuj twierdzenie Radona-Nikodyma.

5. (4pkt) Załóżmy, że $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ jest bazą o.n. pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Niech
   $$M = \{x \in \mathcal{H}\colon\ 2\langle x, u_{2n-1}\rangle = \langle x, u_{2n}\rangle \text{ dla } n = 1, 2, \ldots\}.$$
   Wówczas

   $M^{\perp} =$ ......

   Ponadto odległość wektora $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} u_n$ od M wynosi ....

6. (4pkt) Przekształcenie T na l_2 jest zadane wzorem $Tx = (\frac{2n}{n+1} i^n x_n)_{n \geqslant 1}$. Oblicz
   i) $\|T\|$ =....................................,$\|T^*\|$ =.................................
   ii) $\sigma(T)$ =..
   iii) $\sigma(T^*)$ =..

7. (2pkt) Wielomiany są gęste w następujących przestrzeniach (podkreśl właściwe odpowiedzi) $L_\infty[0,1]$, $L_1[0,1]$, $L_2[0,1]$, $C[0,1]$, $C_{\text{ogr}}(\mathbb{R})$, $L_1(\mathbb{R})$, $L_2(\mathbb{R})$.

8. (3pkt) Wzór $\varphi(f) = \int_0^\infty (3+t)^{-1/5} f(t) dt$ zadaje funkcjonał ciągły na $L_p[0,\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ....
   Norma tego funkcjonału wynosi...

9. (3pkt) Ciąg $a_n I_{[0,n^{-3}]}$ jest zbieżny w $L_2[0,1]$ słabo do zera wtedy i tylko wtedy, gdy ....

   (proszę o podanie jak najprostszego warunku na ciąg a_n).

10. (2pkt) Sformułuj twierdzenie Banacha-Steinhausa.

Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:.......................

Egzamin z Analizy Funkcjonalnej- Część Testowa
grupa II, 16 czerwca 2016

Należy podać tylko krótkie odpowiedzi (w możliwie najprostszej postaci) na podane poniżej polecenia. Test ma dwie strony.

1. (3pkt) Niech $p, q \in [1, \infty]$, zaś $a(p, q)$ będzie najmniejszą liczbą taką, że

   $$\|f\|_{L_q[0,3]} \leqslant a(p,q)\|f\|_{L_p[0,3]} \quad \text{dla dowolnej funkcji } f \in L_p[0,3].$$

   Wówczas $a(p, q) < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy....................................
   oraz jeśli $a(p, q) < \infty$, to $a(p, q) =$...........................

2. (2pkt) Sformułuj twierdzenie Banacha-Steinhausa.

3. (4pkt) Załóżmy, że $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ jest bazą o.n. pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Niech

   $$M = \{x \in \mathcal{H} \colon \ \langle x, u_{2n-1}\rangle = 3\langle x, u_{2n}\rangle \text{ dla } n = 1, 2, \ldots\}.$$

   Wówczas

   $M^{\perp} =$ ......

   Ponadto odległość wektora $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} u_n$ od M wynosi ....

4. (4pkt) Przekształcenie T na l_2 jest zadane wzorem $Tx = (\frac{n}{2n+1} i^n x_n)_{n\geqslant 1}$. Oblicz
   i) $\|T\| =$....................................,$\|T^*\| =$.................................
   ii) $\sigma(T) =$..
   iii) $\sigma(T^*) =$..

5. (3pkt) Ciąg $a_n I_{[0,n^{-2}]}$ jest zbieżny w $L_2[0, 1]$ słabo do zera wtedy i tylko wtedy, gdy ....

   (proszę o podanie jak najprostszego warunku na ciąg a_n).

6. (3pkt) Uzupełnij definicje:
   i) Operator liniowy ciągły S na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest samosprzężony, jeśli.....

   ii) Operator liniowy ciągły S na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest unitarny, jeśli.....

   iii) Operator liniowy ciągły S na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest zwarty, jeśli.....

7. (3pkt) Wzór $\varphi(f) = \int_0^\infty (4+t)^{-1/3} f(t)dt$ zadaje funkcjonał ciągły na $L_p[0,\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ....
   Norma tego funkcjonału wynosi...

8. (2pkt) Podaj definicję przestrzeni $L_\infty([0,\infty))$ oraz odpowiedniej normy.

9. (2pkt) Wielomiany są gęste w następujących przestrzeniach (podkreśl właściwe odpowiedzi) $L_1(\mathbb{R})$, $L_1[0,1]$, $L_2(\mathbb{R})$, $L_2[0,1]$, $L_\infty[0,1]$, $C[0,1]$, $C_{\mathrm{ogr}}(\mathbb{R})$.

10. (2pkt) Sformułuj twierdzenie Radona-Nikodyma.