Zadania z RP 2
Seria 1. Zbieżność rozkładów

We wszystkich poniższych zadaniach (E, ρ) jest przestrzenią metryczną.

1. Wykazać, że dla dowolnych x, x_n, $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n \to x$
2. Sprawdzić, że $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{k}{n}} \Rightarrow \lambda$, gdzie λ - miara Lebesgue'a na $(0, 1)$.
3. Niech X_n będą zmiennymi losowymi o wartościach w E, określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Wykazać, że jeżeli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $X_n \Rightarrow X$.
4. Podać przykład ciągu zmiennych losowych określonych na wspólnej przestrzeni probabilistycznej, które są zbieżne według rozkładu, ale nie są zbieżne według prawdopodobieństwa.
5. Niech X_n będą zmiennymi losowymi o wartościach w E, określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Wykazać, że jeśli $X_n \Rightarrow c$, to $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$. Czy musi zachodzić zbieżność p.n.?
6. (Twierdzenie Scheffe'go) Niech μ będzie miarą σ-skończoną, f_n, f funkcjami nieujemnymi i takimi, że miary $\nu_n(A) = \int_A f_n d\mu$, $\nu(A) = \int_A f d\mu$ są miarami probabilistycznymi. Niech $f_n \xrightarrow{p.w.} f$ względem miary μ. Udowodnić, że
$$\|\nu - \nu_n\|_{TV} := \sup_A |\nu(A) - \nu_n(A)| = \frac{1}{2}\int_\Omega |f - f_n| d\mu \to 0.$$
Wywnioskować stąd, że jeżeli $f_n \to f$ p.w. względem miary μ, to $\nu_n \Rightarrow \nu$.
7. Podać przykład rozkładów ciągłych μ, μ_n na $\mathbb{R}$ o gęstościach odp. f, f_n, takich że $\mu_n \Rightarrow \mu$, ale nie jest prawdą, że $f_n \to f$ p.w. względem miary Lebesgue'a.
8. Niech $S \subseteq E$ będzie zbiorem przeliczalnym, zaś μ, μ_n miarami probabilistycznymi skupionymi na S.
   a) Wykazać, że jeżeli $\mu_n(\{x\}) \to \mu(\{x\})$ dla każdego $x \in S$, to $\mu_n \Rightarrow \mu$.
   b) Wykazać, że jeżeli każdy punkt zbioru S jest izolowany, to implikację z punktu a) można odwrócić oraz że bez tego założenia nie jest to prawdą.
   c) Czy z istnienia granic $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{x\})$ dla każdego $x \in S$ wynika, że ciąg μ_n zbiega słabo?
9. Wykazać, że jeśli $np_n \to \lambda > 0$, to $Bern(n, p_n) \Rightarrow Poiss(\lambda)$.
10. Udowodnić, że jeśli $X_n \Rightarrow X$ oraz $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^p < \infty$ wówczas $\mathbb{E}|X|^p < \infty$, ale niekoniecznie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|^p = \mathbb{E}|X|^p$. Tak jest jeśli $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^{p+\epsilon} < \infty$.

Zadania z RP 2
Seria 2. Zbieżność rozkładów

1. Niech X_n będzie zmienną losową o rozkładzie geometrycznym z parametrem $1/n$. Zbadać słabą zbieżność ciągu $Y_n = \frac{1}{n}X_n$.

2. Niech X_i będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $(0,1)$ zbadać słabą zbiezność ciągu $n\min(X_1,\dots,X_n)$.

3. Wykazać, że jeżeli X_n, Y_n, Z_n są określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej oraz $X_n \Rightarrow X$, $Y_n \Rightarrow a$, $Z_n \Rightarrow b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to $X_nY_n + Z_n \Rightarrow aX + b$.

4. Niech X_n będzie pierwszą współrzędną wektora losowego o rozkładzie jednostajnym na sferze (odp. kuli) w $\mathbb{R}^n$ o środku 0 i promieniu $\sqrt{n}$. Zbadać słabą zbieżność ciągu X_n.

5. Wykazać, że jeżeli $X_nY_n \Rightarrow X$, $Y_n \Rightarrow 0$ oraz f jest funkcją różniczkowalną w zerze, to $X_n(f(Y_n) - f(0)) \Rightarrow f'(0)X$.

6. Niech $h\colon E_1 \to E_2$ będzie funkcją mierzalną, zaś D zbiorem punktów ciągłości h. Wykazać, że jeżeli X_n, X są zmiennymi losowymi, takimi że $X_n \Rightarrow X$ oraz $\mathbb{P}(X \in D) = 0$, to $h(X_n) \Rightarrow h(X)$.

7. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to, by poniższe rodziny miar były ciasne

   a) $\{\mathcal{U}(a,b)\}_{(a,b)\in I}$

   b) $\{Exp(\lambda)\}_{\lambda\in I}$

   c) $\{\mathcal{N}(a,\sigma^2)\}_{(a,\sigma^2)\in I}$.

8. Wykazać, że ciąg $\mathcal{N}(a_n,\sigma_n^2)$ jest słabo zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy istnieją skończone granice $a = \lim_n a_n$ $\sigma^2 = \lim_n \sigma_n^2$ i wówczas $\mathcal{N}(a_n,\sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}(a,\sigma^2)$.

9. Udowodnić, że dla rzeczywistych zmiennych losowych X_n, X zachodzi równoważnosć $X_n \Rightarrow X$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją zmienne X_n', X' takie, że $X_n \sim X_n'$, $X \sim X'$ oraz $X_n' \xrightarrow{p.n.} X'$.

10. Pokazać, że

$$d(\mu,\nu) = \inf\{\epsilon : F_\mu(t) < F_\nu(t+\epsilon) + \epsilon, F_\nu(t) < F_\mu(t+\epsilon) + \epsilon, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

definiuje odległość w rozkładach na $\mathbb{R}$, która zadaje słabą zbieżność.

11. Niech (E,ρ) będzie przestrzenią polską. Wykazać, że

$$d_{BL}(\mu,\nu) = \sup\left\{\left|\int_E f d\mu - \int_E f d\nu\right| : f\colon E \to [-1,1], f \text{ jest 1-Lipschitzowska}\right\}$$

definiuje odległość, która zadaje słabą zbieżność.

12. Udowodnić, że jeśli $X_n \Rightarrow X$, $Y_n \Rightarrow Y$ oraz przy każdym n zmienne X_n, Y_n są niezależne i X jest niezależne od Y, to $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.

13. Załóżmy, że X jest ograniczoną zmienną losową, zaś X_n ciągiem zmiennych losowych takim, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}X_n^k \to \mathbb{E}X$. Wykazać, że wówczas $X_n \Rightarrow X$.

14. (*) Dla $n = 1, 2, \ldots$ niech A_n będzie symetryczną macierzą $n \times n$, której wyrazy na i powyżej przekątnej są niezależnymi zmiennymi Rademachera. Niech $\lambda_1^n \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N^n$ jako wartości własne (liczone z krotnościami) macierzy $\frac{1}{\sqrt{n}} A_n$. Określmy *średnią miarę spektralną* macierzy A_n wzorem

$$\mu_n(A) = \mathbb{E} \frac{1}{n} \#\{i \leqslant n \colon \lambda_i^n \in A\}$$

dla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zbadać słabą zbieżność ciągu μ_n. Wsk. Zbadać zbieżność momentów miary μ_n.

15. (*) Niech E będzie przestrzenią zwartą, zaś G jej grupą izometrii. Wykazać, że na E istnieje miara probabilistyczna μ, niezmiennicza ze względu na działanie grupy G, tzn. taka, że $\mu(g^{-1}A) = \mu(A)$ dla dowolnego $g \in G$ oraz $A \in \mathcal{B}(E)$. Wsk. Niech N_n będzie dowolną skończoną $\frac{1}{n}$-siecią w E. Rozważyć ciąg μ_n znormalizowanych miar liczących na N_n.

Zadania z RP 2.
Seria 3. Funkcje charakterystyczne

1. Obliczyć funkcje charakterystyczne podstawowych rozkładów
   a) dyskretnych,
   b) ciągłych.

2. Pokazać, że kombinacje wypukłe funkcji charakterystycznych są funkcjami charakterystycznymi.

3. Udowodnić, że jeśli funkcja charakterystyczna zmiennej losowej ma drugą pochodną w zerze, to $\mathbb{E}X^2 < \infty$.

4. Wiadomo, że ϕ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X. Czy funkcjami charakterystycznymi są : ϕ^2, $\mathrm{Re}\phi$, $|\phi|^2$, $|\phi|$?

5. Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi Rademachera. Przy pomocy funkcji charakterystycznych sprawdzić, że zmienna losowa $\sum_{i\geqslant 1} 2^{-i}\varepsilon_i$ ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$.

6. Sprawdzić, że splot rozkładów normalnych jest normalny.

7. Niech X będzie zmienną losową taką, że $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$,
$$P(X = n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-itn}\phi_X(t)dt.$$

8. Zmienne losowe X, Y, U, V są niezależne o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$. Obliczyć funkcję charakterystyczną zmiennej a) XY, b) X^2, c) X/Y, d) $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ e) $XY + UV$.

9. **Twierdzenie Riemanna-Lebesgue'a** Udowodnić, że jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym, to $\phi_X(t) \to 0$, gdy $|t| \to \infty$.

10. Czy funkcja $\frac{2}{1+e^{x^2}}$ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu?

11. Udowodnić, że $\phi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ nie jest funkcją charakterystyczną dla $\alpha > 2$.

12. Wykazać, że dla $0 < \alpha \leqslant 2$, $\phi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu.

13. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o wspólnym rozkładzie z funkcją charakterystyczną φ, zaś zmienna N jest niezależna od ciągu (X_i) i ma rozkład Poissona z parametrem λ. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej $Z = X_1 + \ldots + X_N$.

14. Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi, symetrycznymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie, z funkcją charakterystyczną φ różniczkowalną w zerze. Zbadać zbieżność według prawdopodobieństwa ciągu
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.$$