**Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa I - seria 3**

1. Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu
   - dwupunktowego
   - Bernoulliego
   - geometrycznego
   - Poissona
   - normalnego
   - wykładniczego
   - jednostajnego

   jako funkcję parametrów definiujących rozkład.

2. Wykazać, że zmienna losowa o rozkładzie Cauchy'ego nie ma wartości oczekiwanej.

3. Udowodnić, że jeśli zmienna losowa $X$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, to zmienna $Y = \sigma X + a$ ma rozkład $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

4. Niech $p_n$ będzie ciągiem liczb nieujemnych, spełniającym $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Wykazać, że jeśli $\mu_n$ jest rozkładem Bernoulliego o parametrach $p_n, n$, to
$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\{k\}) = \mu(\{k\}),$$
   gdzie $\mu$ jest rozkładem Poissona z parametrem $\lambda$.

5. Niech $X$ będzie zmienną losową całkowalną z kwadratem Znaleźć minimum funkcji $\phi(t) = \mathbb{E}(X-t)^2$.

6. Udowodnić, że jeśli zmienna losowa $X$ przyjmuje tylko wartości naturalne, to
$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

7. Udowodnić, że dla nieujemnej zmiennej losowej $X$ zachodzi
$$\mathbb{E}X^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(X > t)dt.$$
   Wywnioskować stąd tezę poprzedniego zadania.

8. Udowodnić, że jeśli $X \geqslant 0$, zaś funkcja $\phi$ jest rosnąca, różniczkowalna, $\phi(0) = 0$, to
$$\mathbb{E}\phi(X) = \int_0^\infty \phi'(t)\mathbb{P}(X > t)dt.$$