

Kolokwium z rachunku prawdopodobieństwa II

8 grudnia 2003

1. (10 pkt.) Niech X, X_1, X_2, \dots będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie. Załóżmy, że φ_X – funkcja charakterystyczna zmiennej X , jest dwukrotnie różniczkowalna w 0. Zdefiniujmy

$$Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

Wykazać, że Y_n zbiega p.n.

2. (10 pkt.) Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie. Wykazać, że ϕ_{X-Y} jest rzeczywista, nieujemna.
3. (10 pkt.) Niech X_n ($n = 1, 2, \dots$) będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem n . Znaleźć słabą granicę ciągu

$$Y_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}.$$

4. (10 pkt.) Niech X_k ($k = 1, 2, \dots$) będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathbb{P}(X_k = \sqrt{k}) = \mathbb{P}(X_k = -\sqrt{k}) = 1/2$. Zbadać słabą zbieżność ciągu

$$Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

5. (10 pkt.) Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie eksponencjalnym z parametrem 1. Obliczyć $\mathbb{E}(\max(X, Y)|X)$.

Łączna liczba punktów zostanie przeskalowana do przedziału $[0, 20]$

Powodzenia!