

1. Rzucamy n razy kostką. Niech X_1 oznacza wynik pierwszego rzutu, a S — sumę oczek z wszystkich rzutów. Znajdź kowariancję i współczynnik korelacji zmiennych losowych X_1 i S .
2. Przeprowadzamy n niezależnych prób, z których każda kończy się wynikiem rodzaju i z prawdopodobieństwem p_i ($i = 1, 2, \dots, r$), przy czym $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$. (Dla $r = 2$ jest to schemat Bernoulliego.) Niech X_i będzie liczbą prób, które zakończyły się wynikiem rodzaju i ($i = 1, 2, \dots, r$). Znaleźć $\text{Cov}(X_i, X_j)$. Jaki jest rozkład pojedynczej zmiennej X_i ?
3. Macierz kowariancji wektora losowego (X, Y) wynosi: $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Znajdź macierz kowariancji wektora losowego $(2X + 3Y, X - Y)$ i odczytaj z niej wariancję zmiennej $2X + 3Y$ oraz $\text{Cov}(2X + 3Y, X - Y)$.

4. Rozkład łączny zmiennych losowych X i Y ma gęstość

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \begin{cases} xe^{-(x+y)} & \text{dla } x, y > 0, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \\ \text{b) } f(x, y) &= \begin{cases} 2 & \text{dla } 0 < x < y, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \\ \text{c) } f(x, y) &= \begin{cases} x + y & \text{dla } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zbadać, czy zmienne X i Y są niezależne.

5. Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi, każda o rozkładzie $\mathcal{U}(0, 1)$. Znajdź gęstość rozkładu zmiennej: a) $X + Y$; b) $X + Y + Z$.
6. Niech X_1, X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $\mathcal{B}(m, p)$ i $\mathcal{B}(n, p)$ (odpowiednio). Znajdź rozkład zmiennej $X_1 + X_2$.
7. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, każda o rozkładzie $\text{Exp}(\lambda)$. Znaleźć rozkład zmiennej $X + Y$.
8. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrem λ i μ (odpowiednio). Znaleźć rozkład zmiennej $X + Y$.
9. Zmienna losowa (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny o średniej $(2, 3)$ i macierzy kowariancji

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $X - Y$.
 - b) Czy zmienne losowe $X + Y$ i Y są niezależne?
 - c) Czy zmienne X i $X - 3Y$ są niezależne?
10. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$f(x, y) = C \exp\left(-x^2 - xy - \frac{y^2}{2}\right).$$

Wyznaczyć macierz kowariancji wektora (X, Y) , znaleźć wartość stałej C oraz udowodnić, że zmienne X i $X + Y$ są niezależne.