Zadania na ćwiczenia z RP na WNE, 2010/11 — Seria 8

1. Z urny zawierającej 5 kul białych i 8 kul czarnych ciągniemy bez zwracania dwie kule. Niech X_i $(i = 1, 2)$ będzie zmienną losową przyjmującą wartość 1, gdy i-ta kula jest biała, natomiast 0 w przeciwnym wypadku. Opisz rozkład łączny zmiennych losowych X_1, X_2.

2. Rozkład łączny zmiennych losowych X, Y jest ciągły i jego gęstość wyraża się wzorem

$$f(x, y) = c(x^2 + xy)\mathbf{1}_{(0,1)}(x)\mathbf{1}_{(0,2)}(y),$$

gdzie $c > 0$ jest pewną stałą.

   a) Wyznacz wartość stałej c.
   b) Oblicz: $\mathbb{P}(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2})$, $\mathbb{P}(Y > \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2})$, $\mathbb{P}(X > Y)$.
   c) Znajdź gęstości rozkładów brzegowych wektora losowego (X, Y) (tzn. znajdź gęstości rozkładów osobno zmiennej losowej X i zmiennej losowej Y).
   d) Oblicz $\mathbb{E}X$ i $\mathbb{E}Y$.

3. Gęstość rozkładu wektora losowego $\mathbf{X} = (X, Y)$ wyraża się wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{gdy } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Znajdź gęstości rozkładów brzegowych wektora losowego $\mathbf{X}$ oraz $\mathbb{E}\mathbf{X}$ (przypomnijmy, że $\mathbb{E}\mathbf{X} = (\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y)$).

4. Zmienne losowe X, Y mają łączny rozkład ciągły o gęstości

$$f(x, y) = (x + y)\mathbf{1}_{(0,1)}(x)\mathbf{1}_{(0,1)}(y)$$

Oblicz $\mathrm{Cov}(X, Y)$ oraz współczynnik korelacji zmiennych $X + Y$ i $X + 2Y$.

5. Oblicz $\mathrm{Cov}(X, Y)$ dla zmiennych losowych X, Y z zadania 2.

6. Oblicz $\mathrm{Cov}(X, Y)$ dla zmiennych losowych X, Y z zadania 3.