Zadania na ćwiczenia z RP na WNE, 2010/11 — Seria 7

1. Zmienna losowa X ma rozkład: $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, gdzie $p \in (0, 1)$. Znajdź $\mathbb{E}X$ oraz D^2X.

2. Niech X ma rozkład $\mathcal{B}(n, p)$. Wiemy, że $\mathbb{E}X = np$. Znajdź D^2X.

3. Niech X ma rozkład Poissona z parametrem λ. Wiemy, że $\mathbb{E}X = \lambda$. Znaleźć D^2X.

   Wsk.: Najpierw obliczyć $\mathbb{E}X(X - 1)$.

4. Rzucamy sześcienną kostką do gry do momentu aż każdy wynik pojawi się przynajmniej raz. Niech X będzie liczbą wykonanych rzutów. Obliczyć D^2X.

   Wsk.: por. zadanie 10 z serii 6.

5. Załóżmy, że $\mathbb{E}X^4 < \infty$ i niech $Y = aX + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Wyrazić wartość oczekiwaną ($\mathbb{E}Y$), wariancję (D^2Y), współczynnik skośności ($\alpha_3 = \frac{\mathbb{E}(Y-\mathbb{E}Y)^3}{(D^2Y)^{3/2}}$) oraz współczynnik spłaszczenia (kurtozę, $\alpha_4 = \frac{\mathbb{E}(Y-\mathbb{E}Y)^4}{(D^2Y)^2} - 3$) przy pomocy odpowiednich parametrów rozkładu zmiennej X oraz współczynników a i b.

6. Zmienna losowa X ma średnią m i wariancję σ^2. Znajdź średnią i wariancję zmiennej losowej $Y = \frac{X-m}{\sigma}$.

7. Zmienna losowa X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Stosując wzór na całkowanie przez części pokaż, że dla całkowitego $n \geqslant 1$,

   $$\mathbb{E}X^{n+1} = n\mathbb{E}X^{n-1}.$$

   Następnie wyprowadź wzór na parzyste momenty zmiennej X, tj. oblicz $\mathbb{E}X^{2k}$ dla $k \in \mathbb{N}$, oraz oblicz kurtozę zmiennej X, czyli $\alpha_4 = \frac{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^4}{(D^2X)^2} - 3$.

8. Dla $p \in (0, 1)$ znajdź kwantyl rzędu p zmiennej losowej X, której dystrybuanta zadaje się wzorem

   a) $$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ t^2 & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 1; \end{cases}$$

   b) $$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [1, 2) \\ \frac{1}{4}t & \text{dla } x \in [2, 4) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 4. \end{cases}$$

9. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste, które stanowią medianę (kwantyl rzędu 1/2) zmiennej X o dystrybuancie

   $$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [1, 4) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 4. \end{cases}$$

10. Znajdź medianę rozkładu wykładniczego z parametrem λ. Jak ma się ona do wartości oczekiwanej tego rozkładu?

11. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Stosując wzór na całkowanie przez części, oblicz $\mathbb{E}X^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Następnie znajdź współczynnik skośności (α_3) oraz kurtozę (α_4) zmiennej X.

12. Dla dowolnego naturalnego n znajdź $\mathbb{E}Y^n$, gdzie Y ma rozkład $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

    Wsk.: jaki rozkład ma zmienna $X = \lambda Y$?

13. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$. Znaleźć dystrybuantę, gęstość, wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej

    a) $\max(X, Y)$;
    b) $\min(X, Y)$.

14. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X ma rozkład $\mathcal{U}(0, 1)$ natomiast Y ma rozkład $\mathcal{U}(0, a)$, gdzie $a \geqslant 1$. Znaleźć dystrybuantę, gęstość, wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej

    a) $\max(X, Y)$;
    b) $\min(X, Y)$.

15. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 1$. Znaleźć dystrybuantę i gęstość zmiennych losowych

    a) $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$;
    b) $\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

16. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej z zadania 15a.

17. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej z zadania 15b.

    Wsk.: skorzystaj ze wzoru $\mathbb{E}Y = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > t)\,dt$. Przydatna też może być następująca tożsamość:

    $$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_n,$$

    gdzie $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

18. Pewną salę oświetla n jednakowych żarówek o średnim czasie życia 1000 godzin. Ponadto załóżmy, że czasy życia poszczególnych żarówek są niezależne i mają rozkład wykładniczy. Korzystając z wyników dwóch poprzednich zadań oblicz

    a) wartość oczekiwaną i wariancję czasu jaki upłynie do momentu przepalenia się pierwszej żarówki;
    b) średni czas jaki upłynie do momentu przepalenia się wszystkich żarówek w sali.