Zadania na ćwiczenia z RP na WNE, 2010/11 — Seria 6

1. Wyznaczyć wartość oczekiwaną rozkładu

   a) jednostajnego $\mathcal{U}(a, b)$,
   b) wykładniczego $\mathrm{Exp}(\lambda)$,
   c) Bernoulliego $\mathcal{B}(n, p)$,
   d) geometrycznego Geom(p),
   e) Poissona $\mathrm{Pois}(\lambda)$.

2. Niech X będzie zmienną o rozkładzie

   a) jednostajnyn $\mathcal{U}(a, b)$,
   b) wykładniczym $\mathrm{Exp}(\lambda)$, przy czym $\lambda > 1$,
   c) normalny $\mathcal{N}(0, 1)$.

   Obliczyć $\mathbb{E}X^2$ oraz $\mathbb{E}e^X$.

3. Dystrybuanta zmiennej losowej X wyraża się wzorem

   a) $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ t^2 & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 1. \end{cases}$

   b) $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 1. \end{cases}$

   c) $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [1, 2) \\ \frac{1}{4}t & \text{dla } x \in [2, 4) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 4. \end{cases}$

   d) $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [1, 4) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 4. \end{cases}$

   Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}X^2$.

4. Niech $0 \leqslant p \leqslant 1$ będzie ustalonym punktem z odcinka $[0, 1]$. Z tego samego odcinka $[0, 1]$ losujemy punkt X, który dzieli nasz odcinek na dwa kawałki: $[0, X]$ oraz $[X, 1]$. Znajdź wartość oczekiwaną długości tego kawałka, który zawiera punkt p.

5. Gramy 30 rozdań w brydża. Niech X oznacza liczbą tych rozdań, w których mieliśmy asa pik lub asa karo. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

6. n osób, wśród których są osoby A i B, ustawia się losowo w kolejce. Niech X oznacza liczbę osób stojących między A i B. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

7. W grupie jest n studentów. Któregoś dnia prowadzący zajęcia rozdał studentom sprawdzone kartkówki w sposób losowy (z tymże każdemu studentowi wręczył jedną kartkówkę). Niech X oznacza liczbę studentów, którzy otrzymali swoją kartkówkę. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}X^2$.

8. Klasa liczy n uczniów. Liczymy ile par uczniów ma urodziny tego samego dnia. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby takich par. (Zakładamy, że nikt nie obchodzi urodzin 29 lutego; ponadto, jeśli trójka uczniów ma urodziny tego samego dnia, to trójka ta tworzy 3 pary.) Dla chętnych: policzyć $\mathbb{E}X^2$.

9. Każdy bok i każdą przekątną sześciokąta foremnego malujemy losowo jednym z trzech kolorów: białym, czarnym lub czerwonym. Niech X oznacza liczbę jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami sześciokąta. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

10. Rzucamy sześcienną kostką do gry do momentu aż każdy wynik pojawi się przynajmniej raz. Obliczyć wartość oczekiwaną liczy rzutów.

11. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Poissona z parametrem 3, a Y ma rozkład geometryczny z parametrem $1/2$. Obliczyć $\mathbb{P}(X = Y - 1)$.