

1. Niech zmienna losowa X będzie liczbą sukcesów w schemacie Bernoulliego $\mathcal{B}(n = 5, p = \frac{1}{4})$. Przyjmując standardową konstrukcję przestrzeni probabilistycznej dla schematu Bernoulliego (np. $\Omega = \{0, 1\}^n$, etc.), zidentyfikować czym są następujące zdarzenia: $\{X \geq 4\}$, $\{-1 < X < 2\}$, $\{X = 2\}$. Następnie wyznaczyć ich prawdopodobieństwa, tzn. policzyć $\mathbb{P}(X \geq 4)$ oraz $\mathbb{P}(-1 < X < 2)$, $\mathbb{P}(X = 2)$.
2. Losujemy punkt z odcinka $[0, 1]$ i względem tego punktu dzielimy nasz odcinek na dwa mniejsze. Przez X oznaczymy zmienną losową będącą ilorazem długości krótszego do długości dłuższego z uzyskanych odcinków. Przyjmując naturalną konstrukcję przestrzeni probabilistycznej dla powyższego doświadczenia losowego ($\Omega = [0, 1]$), zidentyfikuj zdarzenia: $\{X \leq 1/2\}$, $\{1/4 < X \leq 1/3\}$, $\{X = 1/2\}$. Następnie oblicz $\mathbb{P}(X \leq 1/2)$, $\mathbb{P}(1/4 < X \leq 1/3)$, $\mathbb{P}(X = 1/2)$.
3. Niech zmienna losowa X będzie sumą oczek jakie wypadły przy rzucie dwoma kostkami. Opisać rozkład zmiennej losowej X a także wypisać jej dystrybuantę.
4. Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu
 - a) dwupunktowego $p\delta_a + (1-p)\delta_b$, gdzie $a < b$ (innymi słowy, jest to rozkład zmiennej losowej X , dla której $\mathbb{P}(X = a) = p$ oraz $\mathbb{P}(X = b) = 1 - p$);
 - b) jednostajnego na odcinku (a, b) , gdzie $a < b$;
 - c) wykładniczego z parametrem $\lambda > 0$ (gęstość tego rozkładu wyraża się wzorem $\lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$).
5. Znajdź dystrybuantę i gęstość (o ile istnieje) zmiennej losowej X z zadania 2.
6. Dystrybuanta zmiennej losowej X wyraża się wzorem

$$\text{a) } F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ t^2 & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{b) } F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{dla } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{c) } F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [1, 2) \\ \frac{1}{4}t & \text{dla } x \in [2, 4) \\ 1 & \text{dla } x \geq 4. \end{cases}$$

$$\text{d) } F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [1, 4) \\ 1 & \text{dla } x \geq 4. \end{cases}$$

Czy X jest zmienną losową ciągłą (tzn. czy rozkład X jest ciągły). Jeśli tak, to znaleźć gęstość X .

7. Przy rzucie pewną monetą orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$. Przyjmujemy, że rzucamy tą monetą aż wypadnie orzeł i niech X oznacza liczbę wykonanych rzutów. Znaleźć rozkład zmiennej losowej X oraz jej dystrybuantę.
8. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie geometrycznym z parametrem p (patrz zadanie 7). Obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{P}(X > k+l | X > k)$ dla $k, l > 0$. Otrzymany wynik zinterpretować w kontekście doświadczenia losowego z zadania 7.
9. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$, tzn. gęstość X wyraża się wzorem $\lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$. Obliczyć $\mathbb{P}(X > t+h | X > h)$ dla $t, h > 0$.
10. Pokazać, że funkcja $g(x) = 3x^2 e^{-x^3} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$ jest gęstością prawdopodobieństwa. Niech X będzie zmienną losową o tej gęstości. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = \max(X^2, 3X)$. (Wsk.: znajdź dystrybuantę Y .)
11. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = -\ln X$.
12. Zmienna losowa X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Znaleźć rozkład zmiennej
 - a) $Y = e^X$;
 - b) $Y = X^2$.
13. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ . Znaleźć rozkład zmiennej
 - a) $Y = \frac{1}{X+1}$;
 - b) $Y = \sqrt{X}$.
14. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = \sin X$.
15. Losujemy punkt z koła o środku w $(0, 0)$ i promieniu 1. Niech X będzie współrzędną x wylosowanego punktu. Znaleźć dystrybuantę i gęstość (o ile istnieje) zmiennej X .