Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa, 3 grudnia 2010r.

Wersja I

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**, którą należy **czytelnie podpisać imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** i opatrzyć **numerem wersji i zadania**, np.: „Zad. I.3".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielnoci pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.

---

1. Rzucamy n razy prawidłową kostką, $n \geqslant 3$. Jaka jest szansa, że szóstka wypadnie **a)** przynajmniej raz? **b)** przynajmniej dwa razy? **c)** dokładnie 3 razy?
2. Z talii 52 kart losujemy 17 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że mamy wszystkie 4 asy, jeśli wiadomo, że mamy asa pik i asa trefl.
3. W urnie znajduje się 5 kostek, przy czym trzy kostki są prawidłowe, a dwie są fałszywe — mają aż 3 ściany z sześcioma oczkami. Wyciągnięto losowo kostkę z urny i wykonano nią rzut. Wypadła szóstka. **a)** Jakie jest prawdopodobieństwo, że kostka jest fałszywa? **b)** Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucając drugi raz tą kostką znowu wyrzucimy szóstkę?
4. Typowa strona maszynopisu zawiera 1800 znaków. Pewna sekretarka, pisząc tekst, myli się z prawdopodobieństwem $\frac{1}{600}$ przy wprowadzaniu każdego pojedynczego znaku. Stosując przybliżenie Poissona, podaj jaka jest szansa, że na jednej stronie znajdzie się nie więcej niż jeden błąd. Podaj także oszacowanie błędu przybliżenia.
5. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości $f(x) = \frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$. Znajdź gęstość rozkładu zmiennej losowej $Y = \ln X$.
6. Dystrybuanta zmiennej losowej X wyraża się wzorem $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ t/6 & \text{dla } t \in [0,1) \\ 1/4 & \text{dla } t \in [1,2) \\ t/8 & \text{dla } t \in [2,8) \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 8. \end{cases}$
   a) Oblicz $\mathbb{P}(X > 1)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ i $\mathbb{P}(1 \leqslant X \leqslant 4)$.
   b) Czy X jest zmienną losową ciągłą? Jeśli tak, to znajdź jej gęstość, w przeciwnym razie uzasadnij odpowiedź.
7. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości $f(x) = \frac{1}{2}xe^{-x+1}\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$. Oblicz $\mathbb{E}(X^{-1}e^{-2X})$.

Wybierz **jedno** z poniższych zadań:[1]

8A. Z odcinka $[0,2]$ losujemy punkt X (według rozkładu jednostajnego), który dzieli nasz odcinek na dwa kawałki: $[0,X]$ oraz $[X,2]$. Niech Y będzie różnicą pomiędzy długością dłuższego i krótszego kawałka (oznacza to w szczególności, że $Y \geqslant 0$). Oblicz $\mathbb{E}Y$.

8B. W loterii jest 1000 losów, a wśród nich 100 wygrywających. Ciągniemy n losów ($0 \leqslant n \leqslant 1000$). Niech X oznacza liczbę losów wygrywających pośród tych wyciągniętych. Oblicz **a)** $\mathbb{E}X$, **b)** $\mathbb{E}X^2$.

Potencjalnie przydatne wzory

$e^{-3} \approx 0,05$

Nazwa i oznaczenie rozkładu	masy rozkładu / gęstość	$\mathbb{E}X$	D^2X
Bernoulliego (dwumianowy) $\mathcal{B}(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ dla $k = 0,1,\ldots,n$	np	$np(1-p)$
Poissona $\mathrm{Pois}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ dla $k = 0,1,\ldots$	λ	λ
geometryczny $\mathrm{Geom}(p)$	$(1-p)^{k-1}p$ dla $k = 1,2,\ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
jednostajny $\mathcal{U}(a,b)$	$\frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{(a,b)}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
wykładniczy $\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normalny $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2

[1] W przypadku rozwiązania obu zadań, oceniane będzie tylko zadanie 8A