Rozwiązanie zadania 4 z egzaminu z Rachunku Prawdopodobieństwa (wersja I)

Niech X_i ($i = 1, 2, \ldots, 10$) będzie zmienną losową przyjmującą wartość 1, jeśli i-ty jest wygrywający oraz 0 w przeciwny przypadku. Oczywiście zachodzą następujące relacje między zmiennymi losowymi X_i a zmiennymi losowymi X i Y opisanymi w treści zadania:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_5,$$

$$Y = X_6 + X_7 + \ldots + X_{10}.$$

Z dwuliniowości kowariancji mamy

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=6}^{10} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Dla ustalonych $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$, $j \in \{6, 7, \ldots, 10\}$,

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}X_i X_j - \mathbb{E}X_i X_j = \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) - \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1)$$

(ostatnia równość wynika z faktu, że zmienne X_i i X_j przyjmują tylko wartości 0 i 1). Prawdopodobieństwo, że i-ty los jest wygrywający (tj. $\mathbb{P}(X_i = 1)$) wynosi $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. Podobnie $\mathbb{P}(X_j = 1) = 1/10$. Natomiast prawdopodobieństwo i-ty i j-ty los ($i \neq j$) są wygrywające (tj. $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1)$) wynosi $\frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} = \frac{1}{110}$. Wobec tego

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{110} - \left(\frac{1}{10}\right)^2 = -\frac{1}{1100}.$$

Ostatecznie,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=6}^{10} \left(-\frac{1}{1100}\right) = -\frac{25}{1100} = -\frac{1}{44}.$$