Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa, 2 lutego 2011r.

Wersja II

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu** i opatrzona **numerem wersji i zadania**, np.: „Zad. II.3".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielnoci pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.

---

1. Zmienne losowe X, Y i Z są niezależne i wszystkie mają rozkład jednostajny na odcinku $(0, 2)$. Znajdź dystrybuantę oraz gęstość rozkładu zmiennej losowej $V = \max(X, Y, Z)$.

2. Zmienna losowa X ma gęstość $g(x) = 3(1-x)^2 \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$. Znajdź medianę $\mathrm{Med}(X)$, wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$ oraz wariancję D^2X zmiennej losowej X.

3. Rozkład łączny zmiennych losowych X, Y ma gęstość $g(x,y) = c(x^2 + xy^2)\mathbf{1}_{(0,3)}(x)\mathbf{1}_{(0,2)}(y)$, gdzie $c > 0$ jest pewną stałą.
(a) Wyznacz wartość stałej c. **(b)** Oblicz $\mathbb{P}(X \geqslant 1, Y \leqslant 1)$.

4. W loterii bierze udział 1000 losów, wśród których 100 jest wygrywających. Ciągniemy kolejno 40 losów, a następnie otwieramy je. Niech X oznacza liczbę losów wygrywających wsród pierwszych 20 wyciągniętych losów, zaś Y — liczbę losów wygrywających wsród pozostałych 20 wyciągniętych losów. Oblicz $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

5. Rozkład łączny zmiennych losowych X, Y ma gęstość $g(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)} & \text{dla } 0 < x \leqslant y, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$
(a) Znajdź gęstości rozkładów brzegowych.
(b) Zbadaj, czy zmienne X i Y są niezależne. **(c)** Oblicz $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$.

6. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 2 i 5 (odpowiednio).
(a) Opisz rozkład zmiennej losowej $X + Y$. **(b)** Oblicz $\mathbb{E}(X + Y \mid X)$.

7. Wektor losowy (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny o średniej $(-11, 1)$ i macierzy kowariancji $Q = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.
(a) Wyznacz gęstość zmiennej losowej $X + Y$. **(b)** Czy zmienne losowe X i $X + Y$ są niezależne?

8. Na pewien przedmiot zapisanych jest 162 studentów. Pod koniec semestru, zanim znane są jakiekolwiek wyniki I terminu egzaminu, trzeba dokonać rezerwacji sali na egzamin poprawkowy. Wykładowca szacuje, że średnio co trzeci student będzie pisał egzamin poprawkowy (dokładniej, każdy student, niezależnie od pozostałych, z prawdopodobieństwem 1/3 będzie pisał egzamin poprawkowy). Jaka musi być pojemność sali, aby z prawdopodobieństwem około 0,9 wszyscy zdający egzamin poprawkowy pomieścili się?

Potencjalnie przydatne wzory

$\Phi(1,28) = \int_{-\infty}^{1,28} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \approx 0,9$

Nazwa i oznaczenie rozkładu	masy rozkładu / gęstość	$\mathbb{E}X$	D^2X
Bernoulliego (dwumianowy) $\mathcal{B}(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$	np	$np(1-p)$
Poissona $\mathrm{Pois}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ dla $k = 0, 1, \ldots$	λ	λ
geometryczny $\mathrm{Geom}(p)$	$(1-p)^{k-1}p$ dla $k = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
jednostajny $\mathcal{U}(a,b)$	$\frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{(a,b)}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
wykładniczy $\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normalny $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2
gamma$(a,\, b)$	$\frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b^2}$

Współczynnik skośności: $\alpha_3 = \dfrac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^3}{(D^2X)^{3/2}}$ Współczynnik spłaszczenia: $\alpha_4 = \dfrac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^4}{(D^2X)^2} - 3$