

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania**, np.: „Zad. I.3”.
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.

- Zmienne losowe X, Y i Z są niezależne i wszystkie mają rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$. Znajdź dystrybuantę oraz gęstość rozkładu zmiennej losowej $V = \min(X, Y, Z)$.
- Zmienna losowa X ma gęstość $g(x) = \frac{1}{4}x^3 \mathbf{1}_{(0,2)}(x)$. Znajdź medianę $\text{Med}(X)$, wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$ oraz wariancję D^2X zmiennej losowej X .
- Rozkład łączny zmiennych losowych X, Y ma gęstość $g(x, y) = c(x^2y + y^2) \mathbf{1}_{(0,3)}(x) \mathbf{1}_{(0,2)}(y)$, gdzie $c > 0$ jest pewną stałą.
(a) Wyznacz wartość stałej c . (b) Oblicz $\mathbb{P}(X < 1, Y > 1)$.
- W loterii bierze udział 100 losów, wśród których 10 jest wygrywających. Ciągniemy kolejno 10 losów, a następnie otwieramy je. Niech X oznacza liczbę losów wygrywających wśród pierwszych pięciu wyciągniętych losów, zaś Y — liczbę losów wygrywających wśród pozostałych pięciu wyciągniętych losów. Oblicz $\text{Cov}(X, Y)$.
- Rozkład łączny zmiennych losowych X, Y ma gęstość $g(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-y} & \text{dla } 0 < y < x, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$
(a) Znajdź gęstości rozkładów brzegowych.
(b) Zbadaj, czy zmienne X i Y są niezależne. (c) Oblicz $\mathbb{E}(X | Y = y)$.
- Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne i wszystkie mają rozkład wykładniczy z parametrem 1.
(a) Opisz rozkład zmiennej losowej $X + Y + Z$. (b) Oblicz $\mathbb{E}(X + Y + Z | X)$.
- Wektor losowy (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny o średniej $(10, -5)$ i macierzy kowariancji $Q = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.
(a) Wyznacz gęstość zmiennej losowej $X + Y$. (b) Czy zmienne losowe $X + Y$ i Y są niezależne?
- Na pewien przedmiot zapisanych jest 400 studentów. Pod koniec semestru, zanim znane są jakiegokolwiek wyniki I terminu egzaminu, trzeba dokonać rezerwacji sali na egzamin poprawkowy. Wykładowca szacuje, że średnio co piąty student będzie pisał egzamin poprawkowy (dokładniej, każdy student, niezależnie od pozostałych, z prawdopodobieństwem $1/5$ będzie pisał egzamin poprawkowy). Jaka musi być pojemność sali, aby z prawdopodobieństwem około 0,95 wszyscy zdający egzamin poprawkowy pomieścili się?

Potencjalnie przydatne wzory

$$\Phi(1, 64) = \int_{-\infty}^{1,64} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \approx 0,95$$

Nazwa i oznaczenie rozkładu	masy rozkładu / gęstość	$\mathbb{E}X$	D^2X
Bernoulliego (dwumianowy) $\mathcal{B}(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, \dots, n$	np	$np(1-p)$
Poissona $\text{Pois}(\lambda)$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ dla $k = 0, 1, \dots$	λ	λ
geometryczny $\text{Geom}(p)$	$(1-p)^{k-1} p$ dla $k = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
jednostajny $\mathcal{U}(a, b)$	$\frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{(a,b)}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
wykładniczy $\text{Exp}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normalny $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2
gamma(a, b)	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b^2}$

$$\text{Współczynnik skośności: } \alpha_3 = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^3}{(D^2X)^{3/2}} \quad \text{Współczynnik spłaszczenia: } \alpha_4 = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^4}{(D^2X)^2} - 3$$