Zadania na ćwiczenia z Funkcji Analitycznych, semestr letni 2011 — Seria 9

1. Wykazać, że jeśli dla danych $a \in \mathbb{C}$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, funkcja $f(z)$ jest ciągła na łukach okręgów $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C}\colon z = a + re^{i\theta}, \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\}$, i jeśli $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = b$, to $\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = ib(\theta_2 - \theta_1)$.

2. Opierając się na równości $2\sin^2 z = \mathrm{Re}(1 - e^{2iz})$ $(z \in \mathbb{R})$ i całkując funkcję $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ po konturze złożonym z łuków $[-R, -r]$, $-\Gamma(r)$, $[r, R]$, $\Gamma(R)$ $(0 < r < R)$ wykazać, że
$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. Wykazać w podobny sposób jak w poprzednim zadaniu, że
$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 mx\,dx}{x^2(x^2+a^2)} = \frac{\pi}{4a^3}(2am - e^{-2am} - 1), \qquad (a, m > 0).$$

4. Całkując funkcje $f(z) = e^{az}(1+e^z)^{-1}$ $(0 < a < 1)$ po obwodzie prostokąta P o wierzchołkach $\mp R, \mp R + 2\pi i$ wykazać, że
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$
Wykazać również, że $\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin a\pi}$.

5. Całkując funkcję $f(z) = \Big((1+z^2)\cosh\frac{1}{2}\pi z\Big)^{-1}$ po obwodzie kwadratu Q_N o wierzchołkach $\mp N, \mp N + 2iN$, gdzie N jest liczbą naturalną, wykazać, że
$$\int_0^\infty \left((1+z^2)\cosh\frac{1}{2}\pi z\right)^{-1} dx = \ln 2.$$

6. Wykazać, że wielomian $P(z) = z^8 + 3z^3 + 7z + 5$ posiada dokładnie dwa pierwiastki w pierwszej ćwiartce.

7. Wykazać, że wielomian $P(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 10$ posiada dokładnie jeden pierwiastek w każdej ćwiartce.

8. Wykazać, że wszystkie zera wielomianu $P(z) = z^5 - z + 16$ leżą w pierścieniu $1 < |z| < 2$. Wykazać również, że dokładnie dwa zera mają dodatnią część rzeczywistą.

9. Znaleźć liczbę pierwiastków w kole $B(0,1)$ dla wielomianów: (i) $z^4 - 5z + 1$; (ii) $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$.

10. Wykazać, że jeśli $a > e$, to równanie $az^n = e^z$ posiada dokładnie n pierwiastków w kole $B(0,1)$.

11. Załóżmy, że $0 < |a| < 1$ oraz że p jest liczbą naturalną. Wykazać, że równanie $(z-1)^p = ae^{-z}$ posiada dokładnie p różnych pierwiastków o dodatniej części rzeczywistej oraz że wszystkie te pierwiastki leżą w kole $B(1,1)$.