Zadania na ćwiczenia z Funkcji Analitycznych, semestr letni 2011 — Seria 8

1. (Punkt pozornie osobliwy) Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w pierścieniu $0 < |z-a| < R$. Załóżmy ponadto, że $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$. Wykazać, że

   a) dla dowolnej krzywej regularnej zamkniętej γ leżącej w kole $|z-a| < R$ i nie przechodzącej przez a mamy $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$;

   b) jeśli $0 < |z_0 - a| < r < R$, to $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$;

   c) istnieje skończona granica $\lim_{z\to a} f(z) = b$ i że $f(z)$ jest analityczna w kole $|z-a| < R$, jeśli położymy $f(a) = b$.

2. Wykazać, że funkcje $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ oraz $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-n)^{-2} = \varphi(z)$ są analityczne dla $z \notin \mathbb{Z}$ i posiadają te same części główne w otoczeniu każdego punktu osobliwego $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Natępnie pokazać, że funkcja całkowita $g(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \varphi(z)$ redukuje się do zera.

3. Wyznaczyć residua funkcji

   a) $\frac{e^z}{z(z-1)}$ w punktach $z = 0, 1$;

   b) $\frac{e^{\pi z}}{1+z^2}$ w punktach $z = \pm i$.

4. Wynaczyć residua:

   a) $\operatorname{res}_1 \frac{e^z}{(z-1)^4}$;

   b) $\operatorname{res}_{ai} \frac{e^{miz}}{(z^2+a^2)^2}$;

   c) $\operatorname{res}_{z_1} (z-z_1)^{-n}(z-z_2)^{-1}$;

   d) $\operatorname{res}_i (1+z^2)^{-n}$.

5. Obliczyć

   a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx$;

   b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$;

   c) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,dx$, $a > 0$;

   d) $\int_0^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4+a^4)^2}\,dx$, $a > 0$.

6. Wykazać, że przy $A > 0$ zachodzi nierówność $\int_0^\pi \exp(-A\sin\theta)\,d\theta < \pi/A$.

7. Obliczyć

   a) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx, \quad a > 0$;

   b) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\,dx, \quad a > 0$;

   c) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx, \quad a, b > 0, \quad a \neq b$;

   d) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\,dx$.