

1. Wykazać, że funkcja całkowita  $f(z)$  jest
  - a) stała, gdy jej część rzeczywista jest ograniczona z góry;
  - b) wielomianem stopnia  $\leq k$ , gdy  $|f(z)| \leq M|z|^k + C$  dla pewnych stałych  $M, C > 0$ .
2. Wykazać, że jeżeli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$  jest bezwzględnie zbieżny, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z-a_n}$ , gdzie  $(a_n)$  jest dowolnym ciągiem punktów leżących na pewnym konturze  $C$ , jest zbieżny wewnątrz i na zewnątrz  $C$  i jego suma jest w każdym z tych obszarów funkcją analityczną. Rozważyć przypadek, gdy żaden z punktów  $a_n$  nie leży na pewnej części  $C_1$  konturu  $C$ .
3. Wykazać, że szereg

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( z - \frac{1}{z} \right) \left( \frac{1}{1+z^n} - \frac{1}{1+z^{n-1}} \right)$$

jest zbieżny wewnątrz i na zewnątrz okręgu  $|z| = 1$  i znaleźć jego sumę wewnątrz okręgu i na zewnątrz okręgu.

4. Znaleźć rozwinięcie funkcji  $\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$  w szereg Laurenta dla
  - a)  $2 < |z| < 3$ ;
  - b)  $|z| > 3$ .
5. Znaleźć rozwinięcie funkcji  $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ , gdzie  $0 < |a| < |b|$ , w szereg Laurenta dla
  - a)  $|a| < |z| < |b|$ ;
  - b)  $|z| > |b|$ .
6. Znaleźć rozwinięcie funkcji  $(z^2 + 1)^{-1}(z^2 + 2)^{-1}$  w szereg Laurenta dla
  - a)  $1 < |z| < \sqrt{2}$ ;
  - b)  $|z| > \sqrt{2}$ .
7. Rozwinąć funkcję  $\text{Log} \frac{z^2}{z^2-1}$  w szereg Laurenta dla  $|z| > 1$ .
8. Znaleźć rozwinięcie Laurenta funkcji  $z^{-1}(1-z)^{-1}$  w pierścieniowych otoczeniach punktów
  - a)  $z = 0$ ;
  - a)  $z = 1$ ;
  - a)  $z = \infty$ .

Jakie są maksymalne pierścienie zbieżności znalezionych szeregów?

9. Podać przykład szeregu Laurenta, posiadającego niepusty zbiór punktów zbieżności, lecz pusty pierścień zbieżności.