Zadania na ćwiczenia z Funkcji Analitycznych, semestr letni 2011 — Seria 6

1. Wyznaczyć całkę $\int_{C(R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz$ gdy $|a|, |b| < R$ i badając jej zachowanie się przy $R \to \infty$ wykazać, że funkcja całkowita i ograniczona jest stała (twierdzenie Liouville'a).

2. Niech C będzie konturem ograniczającym obszar D, który zawiera 0. Ponadto, funkcja $f(z)$ jest analityczna dla $z \neq 0$ i ograniczona na $\mathbb{C} \setminus D$. Wykazać, że jeśli $a \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$, to

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{af(z)}{z(a-z)}\, dz.$$

Wyznaczyć rownież wartość prawej strony dla $a \neq 0$ leżącego wewnątrz D.

3. Wyznacz wszystkie wartości jakie może przyjąć całka $\int_C \frac{dz}{P_n(z)}$, gdzie $P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$ ($z_j \neq z_k$ dla $j \neq k$), oraz C jest konturem (zorientowanym dodatnio), nie przechodzącycm przez żaden z punktów z_k?

4. Wykazać, że jeżeli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ w kole $|z| < r$ oraz $|a_1| \geqslant \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}$, to $f(z)$ jest funkcją jednolistną (różnowartościową) w kole $|z| < r$. Następnie, opierając się na tym fakcie, znaleźć koło jednolistności $B(r)$ dla sumy szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Czy znalezione w ten sposób r jest największe możliwe?

5. Załóżmy, że $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0} c_n z^n$. Wykazać, że szereg potęgowy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$$

jest zbieżny w $\mathbb{C}$ oraz że dla dowolnego $\theta \in (0, 1)$,

$$|f(z)| \leqslant M(\theta) \exp\left(\frac{|z|}{\theta R}\right).$$

6. Wykazać, że jeżeli $f(z)$ jest analityczna dla $|z| < R$, oraz $R_n(z)$ jest n-tą resztą Taylora w $z = 0$, tj.

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + R_n(z),$$

wówczas

$$R_n(z) = \frac{z^{n+1}}{2\pi i} \int_{C(r)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}(\xi - z)}\, d\xi, \quad \text{gdzie } |z| < r < R.$$

7. Załóżmy, że funkcja $f(z)$ jest regularna w kole $|z| < R$ oraz że $f(re^{i\theta}) = P(\theta) + iQ(\theta)$, przy czym $0 < r < R$. Wykazać, że współczynniki a_n rozwinięcia $f(z)$ w zerze w szereg Taylora wyrażają się wzorami

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} iQ(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

8. Niech $R > 0$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ i niech $f(z)$ będzie sumą tego szeregu dla $|z| < R$. Wykazać, że przy $0 < r < R$ mamy

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

9. Jeżeli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest jednolistna w kole $B(1)$, to pole S obszaru będącego obrazem koła $B(r)$, $0 < r < 1$, wyraża się wzorem

$$S = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}.$$