

1. Obliczyć całkę

$$\int_{\gamma} (z-a)^{-1}(z-b)^{-1} dz$$

gdzie $\gamma = C(r)$ oraz

- a) $|a|, |b| < r$,
- b) $|a| < r < |b|$,
- c) $|a|, |b| > r$.

Czy wynik ulegnie zmianie, jeśli zamiast okręgu $C(r)$ jako krzywą γ weźmiemy brzeg ograniczonego jednopójnego obszaru zawierającego oba/jeden/zero z punktów a, b ?

2. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości całki

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z(z^2-1)}$$

gdzie γ jest krzywą zamkniętą nie przechodzącą przez punkty $0, 1, -1$.

3. Wykazać, że gdy Γ jest dowolną krzywą regularną łączącą punkty $z = 1, z = re^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) i nie przechodzącą przez początek układu, to

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \log r + i\varphi + 2k\pi i,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą (zależna od Γ).

4. Obliczyć całkę

- a) $\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}$, gdzie γ jest elipsą $x^2 + 4y^2 = 1$;
- b) $\int_{C(a,a)} \frac{z}{z^4-1} dz$;
- c) $\int_{C(2a)} \frac{e^z}{z^2+a^2} dz, a > 0$;
- d) $\int_{\gamma} \frac{ze^z}{(z-a)^3}$, gdzie γ jest brzegiem obszaru ograniczonego, jednopójnego i zawierającego a ;
- e) $\int_{C(0, \frac{1}{2})} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$;
- f) $\int_{C(1, \frac{1}{2})} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$.

5. Wykazać, że jeśli $W_n(z)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n i jeśli $a \in B(r)$, to

$$\int_{C(r)} \frac{W_n(z)}{z^{n+1}(z-a)} dz = 0.$$