Zadania na ćwiczenia z Funkcji Analitycznych, semestr letni 2011 — Seria 4

1. Wyznaczyć całkę $\int_\gamma \mathrm{Re} z \, dz$ dla
   a) $\gamma = [0, 1+i]$ (odcinek o końcach w 0 i $1+i$);
   b) $C(r)$.

2. Wyznaczyć całkę $\int_\gamma |z| \, dz$ dla
   a) $\gamma = [-i, i]$;
   b) γ jest lewym półokręgiem łączącym $-i$, i;
   c) γ jest prawym półokręgiem łączącym $-i$, i;

3. Obliczyć całkę $\int_C \frac{1}{z} \, dz$, gdzie C jest
   a) okręgiem o środku w 0 i promieniu r, skierowanym dodatnio;
   b) brzegiem kwadratu skierowanym dodatnio, o środku w 0 i bokach długości 2r, równoległych do osi współrzędnych.

4. (Twierdzenie Greena a twierdzenie Cauchy'ego) Załóżmy, że funkcja f ma pochodną zespoloną wewnątrz i na brzegu jednospójnego obszaru D ograniczonego krzywą zamkniętą C, kawałkami C^1. Zakładając dodatkowo, że $f'(z)$ jest ciągła na $\bar{D}$, udowodnić twierdzenie Cauchy'ego, tj.

$$\int_C f(z) \, dz = 0$$

   przy użyciu twierdzenia Greena.

5. Załóżmy, że $u(x, y)$, $v(x, y)$ są funkcjami określonymi i ciągłymi wraz z pochodnymi cząstkowymi rzędu pierwszego w otoczeniu punktu $z_0 = x_0 + iy_0$. Udowodnić, że na to, by funkcja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ posiadała w punkcie z_0 pochodną, potrzeba i wystarcza, by

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{C(z_0, r)} f(z) \, dz = 0.$$