Zadania na ćwiczenia z Funkcji Analitycznych, semestr letni 2011 — Seria 3

1. Znaleźć wszystkie przekształcenia liniowe ($w = az + b$), które przekształcają
   a) górną półpłaszczyznę w siebie;
   b) górną półpłaszczyznę w dolną półpłaszczyznę;
   c) górną półpłaszczyznę w prawą półpłaszczyznę.

2. Wyznaczyć przekształcenie liniowe przeprowadzające trójkąt o wierzchołkach $0, 1, i$ na trójkąt o wierzchołkach $0, 2, 1 + i$.

3. Wykazać, że jeżeli $a \neq 1$, to przekształcenie $w = az + b$ posiada dokładnie jeden punkt stały z_0 oraz można je przedstawić w postaci $w - z_0 = a(z - z_0)$. Podać interpretację geometryczną tego przekształcenia.

4. Wykazać, że jeśli $|a| \neq r$, to przy przekształceniu $w = z^{-1}$ okrąg $C(a, r)$ przechodzi w okrąg $C(\bar{a}(|a|^2 - r^2)^{-1}, r||a|^2 - r^2|^{-1})$. Co się dzieje, gdy $|a| = r$?

5. Znaleźć obraz danego obszaru przy homografii
   a) $(+, +)$, $w = (z - i)(z + i)^{-1}$;
   b) górne półkole koła $B(0, 1)$, $w = (2z - i)(2 + iz)^{-1}$;
   c) $\{z\colon 0 < \arg z < \pi/4\}$, $w = z(z - 1)^{-1}$;
   d) $\{z\colon 0 < \mathrm{Re} z < 1\}$, $w = (z - 1)(z - 2)^{-1}$;
   e) $\{z\colon 1 < |z| < 2\}$, $w = z(z - 1)^{-1}$.

6. Wyznaczyć wszystkie homografie, przy których górna półpłaszczyzna oraz punkty 0, -1 przechodzą same w siebie.

7. Znaleźć postać ogólną homografii przekształcającej koło $B(0, 1)$ samo w siebie.

8. Znaleźć homografię przekształcającą obszar ograniczony okręgami wewnętrznie stycznymi $C(2)$, $C(1, 1)$ na pas ograniczony dwiema prostymi równoległymi do osi urojonej.

9. Odwzorować konforemnie obszar $(+, +)$ na koło $B(0, 1)$, tak aby punkt $1 + i$ przeszedł na środek koła.