Zadania na ćwiczenia z Funkcji Analitycznych, semestr letni 2011 — Seria 2

1. Wykazać, że funkcja

   a) $f(z) = z\mathrm{Re}z$;
   b) $f(z) = |z|^2$

   posiada pochodną jedynie dla $z = 0$.

2. Wykazać, że funkcja

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & \text{dla } z = x + iy \neq 0 \\ 0 & \text{dla } z = 0 \end{cases}$$

   nie ma pochodnej w punkcie 0, mimo że iloraz różnicowy $(f(z) - f(0))/z$ dąży do określonej granicy, gdy $z \to 0$ po dowolnej prostej.

3. Znaleźć część rzeczywistą i urojoną funkcji $\cos z$ i sprawdzić, że funkcja $\cos z$ spełnia równania Cauchy-Riemanna.

4. Wykazać, że funkcja analityczna mająca w całym obszarze określoności wartości rzeczywiste, musi być stała.

5. Znaleźć obraz pasa $-\pi < \mathrm{Im}z < \pi$ przy odwzorowaniu $w = e^z$. Wyznaczyć obrazy odcinków $x = x_0$ oraz prostych $y = y_0$.

6. Dla jakich wartości $z = x + iy$ wartość funkcji wykładniczej e^z jest

   a) czysto rzeczywista?
   b) czysto urojona?