Zadania na ćwiczenia z Funkcji Analitycznych, semestr letni 2011 — Seria 10

1. Wykazać, że funkcja $w = z/(1-z)^2$ odwzorowuje konforemnie koło $|z| < 1$ na całą płaszczyznę bez półprostej $(-\infty, -1/4]$.

2. Znaleźć odwzorowanie konforemne koła $|z| < 1$ na pas pionowy.

3. Znaleźć odwzorowanie konforemne zewnętrza koła jednostkowego ($|z| > 1$) rozciętego wzdłuż półprostej $(-\infty, -1)$ na (i) płaszczyznę rozciętą wzdłuż ujemnej półosi rzeczywistej $(-\infty, 0]$; (ii) prawą półpłaszczyznę.

4. Wykazać, że jeśli $f(z)$ jest funkcją analityczną w kole $B(0,1)$ taką, że $f(0) = 0$ oraz $|f(z)| < 1$ dla każdego $z \in B(0,1)$, to bądź $|f(z)| < |z|$ dla każdego $z \in B(0,1) \setminus \{0\}$, bądź też $f(z) = e^{i\alpha} z$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Wykazać, że jeśli $w = f(z)$ przekształca konforemnie koło $|z| < 1$ w siebie zachowując 0, to $f(z) = e^{i\alpha} z$.

6. Znaleźć wszystkie funkcje harmoniczne w płaszczyźnie z wyciętą ujemną półosią rzeczywistą $(-\infty, 0]$, które na półprostych o początku w 0 mają stałą wartość.

7. Wyznaczyć wszystkie funkcje harmoniczne w obszarze $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ stałe na okręgach $C(r)$.

8. Dowieść, że funkcje $e^x \cos y$ i $e^x \sin y$ są funkcjami harmonicznymi sprzężonymi.

9. Wykazać, że gdy $u(x,y)$ jest funkcją harmoniczną w obszarze D, to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by istniała funkcja $v(x,y)$ sprzężona z $u(x,y)$ w D, jest, by funkcja analityczna $f(z) = u_x - i u_y$ posiadała w tym obszarze funkcję pierwotną $F(z)$.

10. Korzystając z poprzedniego zadania znaleźć funkcję harmoniczną sprzężoną z funkcją $u(x,y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$.

11. Korzystając z twierdzenia o residuach wykazać, że dla $|a| < 1$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{1 + a^2 - 2a\cos(\theta - \varphi)}\, d\theta = \frac{1 + a^2 \cos 2\varphi}{2(1-a^2)}.$$

Następnie znaleźć funkcję $u(z)$ harmoniczną w kole $|z| < 1$, ciągłą w jego domknięciu, taką że $u(e^{i\theta}) = \cos^2\theta$.

12. Znaleźć $\mathrm{res}_0 e^{z + \frac{1}{z}}$.

13. Znaleźć residuum iloczynu $f(z)g(z)$ w punkcie z_0, w którym funkcja $f(z)$ jest analityczna, a $g(z)$ ma biegun o części głównej $\frac{c_k}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{c_1}{z-z_0}$.

14. Wykazać, że przy dowolnym $R > 0$, zera prawie wszystkich wielomianów $w_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ leżą na zewnątrz koła $|z| \leqslant R$.