Zadania na ćwiczenia z Funkcji Analitycznych, semestr letni 2011 — Seria 1

1. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$;

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$;

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2^n}$;

   d) $\sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n) z^n$, gdzie $a \in \mathbb{C}$

2. Załóżmy, że $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Wykazać, że szereg potęgowy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$$

   jest zbieżny w całej płaszczyźnie zespolonej.

3. Wykazać, że jeli promienie zbieżnoci szeregów potęgowych $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ są odpowiednio równe R_1, R_2, to:

   a) promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum a_n b_n z^n$ spełnia nierówność $R \geqslant R_1 R_2$;

   b) promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n) z^n$$

   spełnia nierówność $R_0 \geqslant \min(R_1, R_2)$.

4. Jeśli $a_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i istnieje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = q \in \mathbb{C}$, to promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest równy $|q|$.

5. Zbadać zachowanie się następujących szeregów potęgowych na brzegu koła zbieżności:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$;

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$;

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$;

   d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n} z^{3n-1}$;

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} z^{2n}$.

6. Podać przykład szeregu rozbieżnego $\sum a_n$, takiego że promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum a_n z^n$ jest równy 1 i istnieje skończona granica $\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$.